2024 1. Session Problemstellung 1

Man betrachte $f_{a,b}(x) = \dfrac{ax^3+b}{x^2}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie die Werte der Parameter, sodass die Gerade t mit Gleichung $7x + y - 12 = 0$ eine Tangente an den Graphen von $f_{a,b}(x)$ im Punkt P mit Abszissenwert x = 1 ist.

   Ab hier gilt: $a = 1$ und $b = 4$

2. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen γ.
   Stellen Sie die Gleichung der zusätzlichen Tangente an den Graphen von γ auf, die durch den Punkt P geht.

3. Bestimmen Sie, beim Variieren des reellen Parameters m, die Anzahl der Schnittpunkte zwischen Gerade $y - 5 = m(x - 1)$ und Graphen γ.

4. Sei A(k), mit $k > \dfrac{3}{2}$ die begrenzte Fläche, die zwischen dem Graphen γ, seiner schiefen Asymptote, der Geraden t und der Geraden x = k eingeschlossen wird. Bestimmen Sie $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k)$ und geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses an.

2024 1. Session Problemstellung 2

> "Zu Beginn und am Ende steht das Mysterium. [...] Die Mathematik nähert sich diesem Mysterium, ohne dieses zu ergründen." (E. De Giorgi)

Man betrachte die folgende Funktionsschar

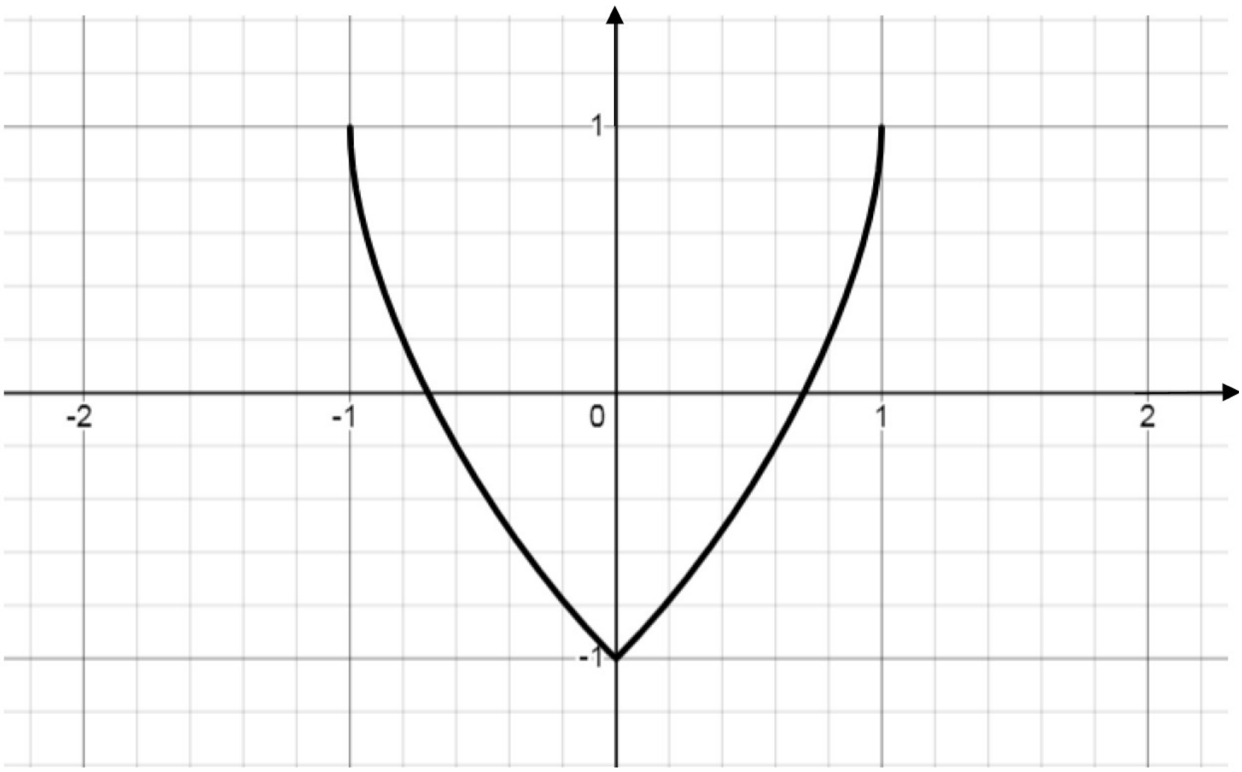
$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1},$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

1. Zeigen Sie, dass für jeden Wert von n die Funktion f_n im Abszissenwert $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Bestimmen Sie denjenigen Wert n, für den der Graph der Funktion f_n einen Knickpunkt hat. Für geeignete Werte a, b beschreibt der Graph α in der Abbildung die Funktion

   $$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2+bx+1}.$$

   Bestimmen Sie die Parameter a und b, sodass f_2 im Intervall $[-1; 1]$ definiert ist und der Graph symmetrisch zur Ordinate liegt!



Ab hier gilt: $a = -1$, $b = 0$.

2. Untersuchen Sie die Funktion
$$g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$$
und zeigen Sie, dass sie am Rand des Definitionsbereichs und in $x = 0$ nicht ableitbar ist!
Der Graph dieser Funktion wird mit β bezeichnet. Zeichnen Sie die Kurve $\gamma = \alpha \cup \beta$.

3. Die Gerade r mit der Gleichung $x = k$ und $-1 < k < 1$ schneidet γ in den Punkten P und Q. Zeigen Sie, dass die Strecke PQ am größten ist, wenn r die Symmetrieachse von γ ist.

4. Überprüfen Sie, dass die Funktion
$$H(x) = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$
eine Stammfunktion der Funktion
$$h(x) = \sqrt{1-x^2}$$
ist. Berechnen Sie die von γ eingeschlossene Fläche mit einer geeigneten Methode!

> "Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters; die Ideen müssen harmonieren wie die Farben der Worte. Schönheit ist die erste Prüfung: Es gibt keinen Platz in der Welt für hässliche Mathematik."(G. H. Hardy)

2024 1. Session Frage 1

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel in B. Zeigen Sie, dass dieses Dreieck genau dann gleichschenklig ist, wenn die Höhe BH (über der Hypotenuse) halb so lang ist wie die Hypotenuse!

2024 1. Session Frage 2

Man wirft fünf Mal eine gezinkte Münze. Die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" ist p.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau zwei Mal Kopf zu erhalten?
- Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit, genau zwei Mal "Kopf" zu erhalten, maximal?

2024 1. Session Frage 3

Im kartesischen Koordinatensystem Oxyz sei die Ebene π: $3x - 2y + 5 = 0$ gegeben.

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes H, der die orthogonale Projektion von $P(4;2;1)$ auf die Ebene π ist!

- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ mit der Ebene π.

2024 1. Session Frage 4

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^3 + x - \cos(x) = 0$ eine einzige positive Lösung aufweist!

2024 1. Session Frage 5

Bestimmen Sie die Polynomfunktion vierten Grades $y = p(x)$, wenn bekannt ist, dass ihr Graph im kartesischen Koordinatensystem die folgenden Bedingungen erfüllt:

- er berührt die x-Achse im Ursprung;

- er verläuft durch den Punkt (1; 0);

- er hat einen Extrempunkt in $(2; -2)$.

2024 1. Session Frage 6

Man betrachte die Integralfunktion $F(x) = \int\limits_a^x \frac{cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt$, mit $x \geqq a$, bei der a einem positiven reellen Wert entspricht.
Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert für a, sodass $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$

2024 1. Session Frage 7

Am kommenden 5. Juli wird die Erde das Aphel erreichen, den Punkt der Erdumlaufbahn mit größtem Abstand zur Sonne und einem Abstandswert von $1{,}52 \cdot 10^{11}$ m. Das Perihel hingegen ist der Punkt mit dem kleinsten Abstand zur Sonne, der ungefähr $1{,}47 \cdot 10^{11}$ m entspricht.
Bestimmen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Gleichung, welche die Bahn der Erde um die Sonne beschreibt!

2024 1. Session Frage 8

Carlo Emilio Gadda schreibt in einer seiner Geschichten aus *L'Adalgisa - Disegni milanesi:* «Die Serviceräume, das Bad, die Gänge, der Vorraum und eine der zwei Toiletten waren mit kleinen roten Fliesen bedeckt: sechseckig [...]. Das Apothema dieser Kacheln war 5,196 Zentimeter: Dabei betrug der Radius des umschriebenen Kreises 60 Millimeter.»
Geben Sie das genaue Verhältnis von Umkreisradius und Apothema (entspricht dem Inkreisradius) für ein regelmäßiges Sechseck an!
Überprüfen Sie das erhaltene Ergebnis unter Berücksichtigung der Maßangaben des Schriftstellers!
Erklären Sie, wieso es möglich ist, mit regelmäßigen, kongruenten sechseckigen F1iesen eine Ebene vo11ständig zu bedecken!
Mit welchen anderen regelmäßigen, zueinander kongruenten Vielecken ist es mög1ich, eine Ebene auszulegen? Begründen Sie Ihre Antwort!