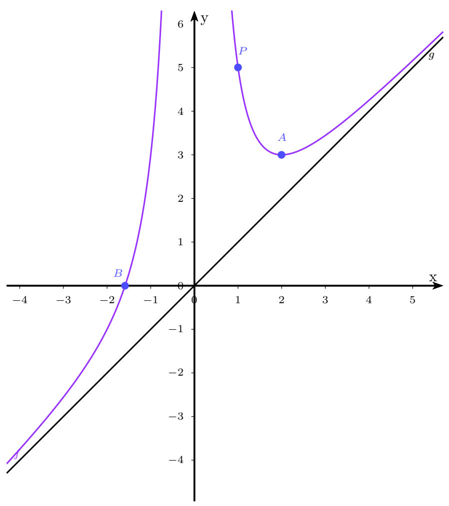
Lösung 2024 1. Session Problemstellung 1

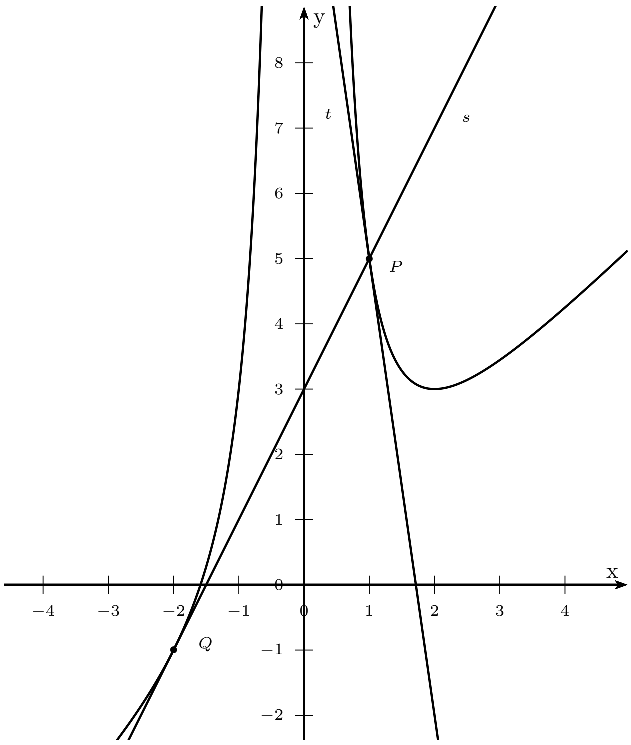
1. Um die Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, verwenden wir, dass die Gerade $t: 7x + y - 12 = 0$ Tangente an die Kurve im Punkt mit der Abszisse $x = 1$ ist.
   In expliziter Form lautet die Gerade $y = -7x + 12$. Mit der Abszisse $x = 1$ erhalten wir den y-Wert $y = 5$
   Der Berührpunkt ist $P(1; 5)$.
   Für die Funktion $f_{a,b}(x)$ müssen daher die folgenden Bedingungen erfüllt sein:
   $\begin{cases} f'_{a,b}(1) = -7 \\ f_{a,b}(1) = 5 \end{cases}$

   Die Ableitung von $f_{a,b}(x)$ ist:
   $f'_{a,b}(x) = \dfrac{3ax^2 \cdot x^2 - 2x(ax^3 + b)}{x^4} = \dfrac{ax^3 - 2b}{x^3}$, wobei wir $x \neq 0$ voraussetzen.
   Damit erhalten wir die beiden Gleichungen
   $\begin{cases} a - 2b = -7 \\ a + b = 5 \end{cases}$
   Daraus folgt: $a = 1; \quad b = 4$

2. Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$:
   $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   Nullstellen: $x = -\sqrt[3]{4}$
   Ableitung: $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3} = 1 - \dfrac{8}{x^3}$ (siehe Herleitung vorhin, $a = 1$ und $b = 4$ eingesetzt!)
   Die Funktion ist somit im ganzen Definitionsbereich ableitbar.
   Extrema: $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 2,\ y = 3$.
   Zweite Ableitung: $f'' = \dfrac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 8) \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{24}{x^4}$.
   Es gibt daher keine Wendestellen.
   Die Funktion ist für $x < 0$ und für $x > 0$ linksgekrümmt ($f''(x) > 0$).
   Zweite Ableitung an der Extremstelle $x = 2$: $f''(2) = \dfrac{3}{2} > 0$. Daher handelt es sich um ein relatives Minimum.
   Monotonie: Die erste Ableitung ist für $0 < x^3 < 8$ negativ, also $0 < x < 2$. Dort ist die Kurve streng monoton fallend.
   Für $x < 0 \vee x > 2$ ist die Funktion streng monoton wachsend.
   Bei $x = 0$ liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.
   Asymptoten:
   Senkrechte Asymptote $x = 0$
   keine waagrechten Asymptoten
   Schiefe Asymptote: $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow y = x$ ist eine schiefe Asymptote.
   Die Funktion weist keine Symmetrie auf.



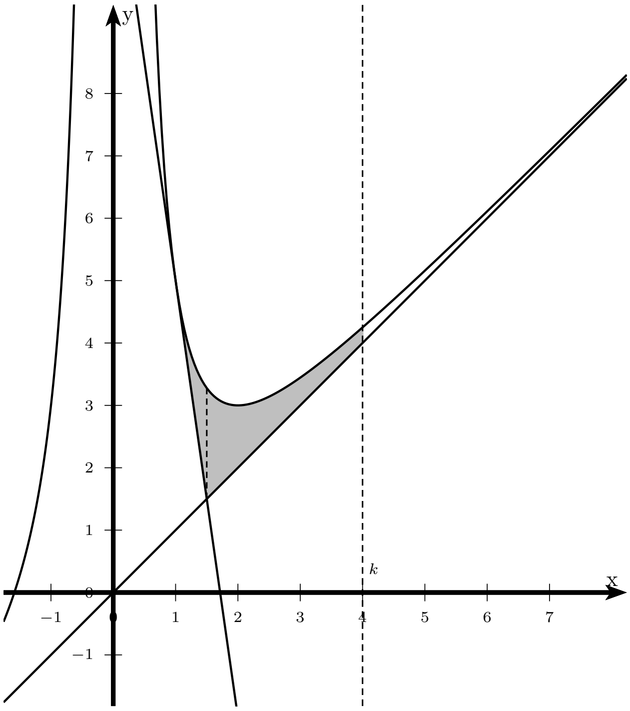
Um die zweite Tangente an den Punkt $P(1;5)$ zu finden, setzen wir die Gleichung folgendermaßen an: $y-5=m(x-1)$, wobei x und y die Koordinaten des Berührpunktes sind.
Damit erhalten wir drei Gleichungen:
$y-5=m(x-1)$, da der Berührpunkt auf der Tangente liegt.
$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$, da der Berührpunkt auf der Kurve liegt.
$k=\dfrac{x^3-8}{x^3}$, da die Steigung im Berührpunkt gleich der Ableitung ist.
Durch Elimination von m und y erhalten wir die Gleichung
$\dfrac{x^3+4}{x^2}-5=\dfrac{x^3-8}{x^3}\cdot(x-1) \Rightarrow x^4+4x=x^4-x^3-8x+8+5x^3 \Rightarrow x^3-3x+2=0$
Die Lösung $x=1$ ist bereits bekannt. Daher lässt sich das Polynom mittels Polynomdivision faktorisieren:
$(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)=0$
Daher ist der zweite Berührpunkt $(-2;-1)$. Die entsprechende Tangente ist $y=2x+3$.



3. Wir schneiden die Gerade durch den Punkt $P(1;5)$ mit dem Graphen.
(Die Gerade $x=1$ wird laut Angabe nicht berücksichtigt!)
$\begin{cases} y-5=m(x-1) \\ f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2} \end{cases}$
Daraus ergibt sich die Gleichung
$m(x-1)+5=\dfrac{x^3+4}{x^2} \Rightarrow mx^3-mx^2+5x^2=x^3+4 \Rightarrow (m-1)x^3+(5-m)x^2-4=0$
$x=1$ ist sicher eine Lösung (P liegt auf der Kurve und auf der Geraden), daher kann man $x-1$ herausheben:
$(x-1)((m-1)x^2+4x+4)=0$
Für $m=1$ fällt der quadratische Term weg, $(x-1)(4x+4)=0$. Damit ergeben sich in diesem Fall zwei Schnittpunkte ($x=-1;\quad x=1$).
Falls $m\neq 1$ ist, untersuchen wir die Diskriminante der Gleichung $(m-1)x^2+4x+4$:
$\Delta=16-16(m-1)=32-16m=16(2-m)$
Falls $m>2$, dann ist die Diskriminante negativ und es gibt nur einen Schnittpunkt (für $x=1$).
Falls $m=2$, dann ist die Diskriminante 0 und es existiert eine zusätzliche Lösung bei $x=-2$. Somit existieren 2 Lösungen.
Falls $m<2$, dann ist die Diskriminante größer als 0 und es existieren zwei zusätzliche Lösungen.
Allerdings fällt für $m=-7$ die Lösung mit $x=1$ zusammen! Wir haben diese Gerade nämlich bereits

als Tangente in P vorausgesetzt, daher ist dort eine Doppellösung!
Zusammenfassend:
$m < -7$ drei verschiedene Schnittpunkte
$m = -7$ ein Schnittpunkt, ein Berührpunkt
$-7 < m < 1$ drei Schnittpunkte
$m = 1$ zwei Schnittpunkte
$1 < m < 2$ drei Schnittpunkte
$m = 2$ ein Schnittpunkt, ein Berührpunkt
$m > 2$ ein Schnittpunkt

4. Schnittpunkt T der beiden Geraden $y = -7x + 12$ und $y = x$:
$-7x + 12 = x \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} = y$
Die beiden Geraden schneiden sich somit bei $T\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$
Bei der Berechnung teilen wir die Fläche in zwei Teile auf.
$A_1 = \int\limits_1^{\frac{3}{2}} f(x) - (-7x + 12)dx = \int\limits_1^{\frac{3}{2}} \dfrac{x^3 + 4}{x^2} + 7x - 12dx = \int\limits_1^{\frac{3}{2}} 8x - 12 + \dfrac{4}{x^2}dx = \left[4x^2 - \dfrac{4}{x} - 12x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$
$A_2 = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{k} f(x) - xdx = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{k} \dfrac{x^3 + 4}{x^2} - xdx = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{k} \dfrac{4}{x^2}dx = \left[-\dfrac{4}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{k} = -\dfrac{4}{k} + \dfrac{8}{3}$
Die Gesamtfläche beträgt $A(k) = 3 - \dfrac{4}{k}$
Der Grenzwert ist $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = \lim\limits_{k\to+\infty} 3 - \dfrac{4}{k} = 3$
Dies ist die Fläche zwischen der Kurve, der Tangente t und der schiefen Asymptote.



Lösung 2024 1. Session Problemstellung 2

1. Für $x > 0$ und $x < 0$ gilt:
$$\sqrt[n]{x^2} = |x|^{2/n}.$$
Daraus ergibt sich:
$$f_n(x) = |x|^{2/n} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}.$$
Nun bilden wir die Ableitung von f_n:
$$f_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(|x|^{2/n} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}\right).$$
Wir verwenden die Kettenregel für den Term $|x|^{2/n}$:

- Für $x \geqq 0$:

$$\frac{d}{dx}|x|^{2/n} = \frac{2}{n}x^{(2/n)-1}.$$

- Für $x < 0$:

$$\frac{d}{dx}|x|^{2/n} = -\frac{2}{n}(-x)^{(2/n)-1}.$$

Es sind 2 Fälle zu unterscheiden:
Falls $n > 2$ ist, dann ist $2/n - 1 < 0$ und die Ableitung existiert an der Stelle 0 nicht (potenzieren von 0 mit negativer Hochzahl!).
Die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung sind nicht endlich, bei x=0 ist eine Spitze:
$f_n'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2}{\mathrm{n}\sqrt[n]{(-\mathrm{x})^{\mathrm{n}-2}}} - \frac{2\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{2\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+1}} = -\infty$

$f_n'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\mathrm{n}\sqrt[n]{\mathrm{x}^{\mathrm{n}-2}}} - \frac{2\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{2\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+1}} = +\infty$

Falls $n = 2$ ist, dann existiert die Ableitung ebenfalls nicht, da 0 mit 0 potenziert wird! Die Grenzwerte der links- und rechtsseitigen Ableitung sind endlich, daher entsteht ein Knickpunkt:
$\mathrm{f'}_2(0^-) = \lim_{\mathrm{x} \to 0^-} -1 - \frac{2\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{2\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+1}} = -1 - \frac{\mathrm{b}}{2}$

$\mathrm{f'}_2(0^+) = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{2\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{2\sqrt{\mathrm{a}x^2+\mathrm{bx}+1}} = 1 - \frac{\mathrm{b}}{2}$

$-1 - \frac{\mathrm{b}}{2} \neq 1 - \frac{\mathrm{b}}{2}, \forall \mathrm{b} \in \mathrm{R}$, daher hat die Funktion an dieser Stelle einen Knickpunkt
Wir haben damit auch gezeigt, dass es kein n gibt, sodass die Ableitung an der Stelle 0 existiert!

Bestimmen der Parameter a und b für $f_2(x)$

Gegeben ist:

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}.$$

Wir sollen die Parameter a und b so bestimmen, dass der Graph von f_2 im Intervall $[-1; 1]$ definiert ist und symmetrisch zur Ordinate liegt.

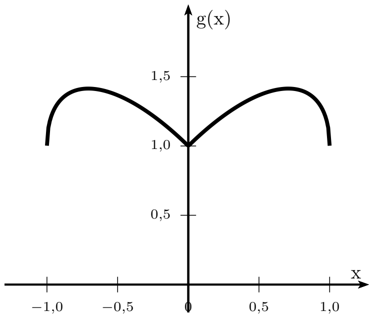
Wir bauen zunächst die Symmetrie bezüglich der Ordinate ein:
Für Symmetrie zur y-Achse muss $f_2(-x) = f_2(x)$ gelten. Dies impliziert:
$f_2(-x) = |-x| - \sqrt{ax^2 - bx + 1} = f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ für alle x-Werte!
Da $|-x| = |x|$ gilt, muss $b = 0$ gelten. ($b = 0$ muss 0 sein, da der lineare Term unter der Wurzel sonst die Symmetrie brechen würde.)
Nun wird der Definitionsbereich $[-1, 1]$ eingebaut. Die Funktion muss für alle $x \in [-1, 1]$ definiert sein, also muss der Radikand nicht-negativ sein!

$$ax^2 + 1 \geqq 0 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1] \Rightarrow -\sqrt{-\frac{1}{a}} \leqq x \leqq \sqrt{-\frac{1}{a}}$$

Daher gilt $1 = \sqrt{-\frac{1}{a}} \Rightarrow a = -1$.
Damit erhalten wir:

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}.$$

2.



Kurvenuntersuchung der Funktion $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$
Definitionsbereich:$D = [-1; 1]$
Die Funktion $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$ ist für $-1 \leqq x \leqq 1$ definiert, da die Wurzel $\sqrt{1-x^2}$ nur in diesem Intervall definiert ist.
Ableitbarkeit am Rand des Definitionsbereichs: Am Rand des Definitionsbereichs, also bei $x = \pm 1$, ist die Funktion nicht ableitbar, da die Ableitung der Wurzelfunktion $\sqrt{1-x^2}$ bei $x = \pm 1$ unendlich wird:

$$g(x) = \begin{cases} x + \sqrt{1-x^2} & \text{für } x \geqq 0 \\ -x + \sqrt{1-x^2} & \text{für } x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \geqq 0 \\ -1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -1^+} g'(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 1^-} g'(x) = -\infty$
Die Ableitung an den Randpunkten ist somit nicht definiert. Ableitbarkeit in $x = 0$: Um die Ableitbarkeit in $x = 0$ zu prüfen, betrachten wir die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung:

$$g(x) = \begin{cases} x + \sqrt{1-x^2} & \text{für } x \geqq 0 \\ -x + \sqrt{1-x^2} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die linksseitige Ableitung in $x = 0$ ist:

$$g'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h + \sqrt{1-h^2} - 1}{h} = -1$$

Die rechtsseitige Ableitung in $x = 0$ ist:

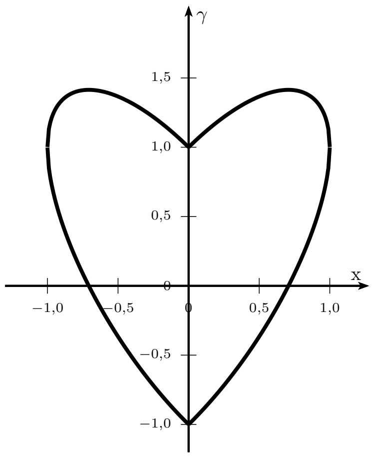
$$g'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h + \sqrt{1-h^2} - 1}{h} = 1$$

Da die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung unterschiedlich sind, ist $g(x)$ bei $x = 0$ nicht ableitbar.
Aufgrund des Vorzeichenwechsels der ersten Ableitung bei $x = 0$ (von - nach +) handelt es sich um ein relatives Minimum mit $y = 1$.
Zweite Ableitung:

$$g''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

für $x \neq 0$
Somit besteht die Kurve aus zwei Rechtskurven ($g''(x) < 0$). Es existiert aber kein Wendepunkt.
Weitere Extrema: $g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \sqrt{2}$
Es handelt sich um absolute Maxima, da der Funktionswert an den Rändern gleich 1 ist.
Symmetrie: Die Funktion $g(x)$ ist eine gerade Funktion, da $g(-x) = g(x)$. Daher ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse!

Graph der Kurve $\gamma = \alpha \cup \beta$:

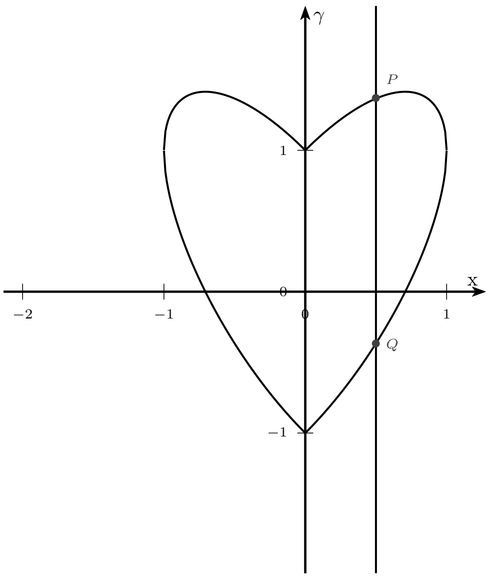


3. Die Gerade r, mit der Gleichung $x = k$ und $-1 < k < 1$, schneidet γ in den Punkten P und Q. Zeigen Sie, dass die Strecke PQ am größten ist, wenn r der Symmetrieachse von γ entspricht.

Symmetrieachse: Die Funktion $g(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse, da $g(x) = g(-x)$. Ebenso ist $f_2(-x) = f_2(x)$. Somit ist auch die Vereinigung der beiden Kurven symmetrisch zur y-Achse ($x = 0$)!

Punkte P und Q: Die Punkte P und Q sind die Schnittpunkte der Geraden $x = k$ mit der Kurve γ. Diese Punkte haben die Koordinaten $P = (k, g(k))$ und $Q = (k, f_2(k))$.

Länge der Strecke PQ: Die Länge der Strecke PQ ist $PQ = g(x) - f_2(k) = 2\sqrt{1-k^2}$.
Da der Ausdruck unter der Wurzel maximal 1 sein kann (wenn k^2 sein Minimum bei $k = 0$ erreicht), erhalten wir dort den maximalen Wert der Länge, nämlich $PQ = 2$.
Die Extremwertrechnung liefert das gleiche Ergebnis:
$(PQ)' = (2\sqrt{1-k^2})' = 2\frac{-2k}{2\sqrt{1-k^2}} = -\frac{2k}{\sqrt{1-k^2}} = 0$ für $k = 0$.
Nachdem die erste Ableitung an der Stelle $k = 0$ einen Vorzeichenwechsel von + nach - hat, handelt es sich um ein relatives Maximum.
Die Randextrema sind bei $k = \pm 1$ gleich 0, daher handelt es sich um ein absolutes Maximum!
Die maximale Länge für PQ von 2 wird bei k=0 erreicht. Diese Strecke liegt auf der Symmetrieachse!



4. Stammfunktion: Um zu überprüfen, ob $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$ ist, berechnen wir die Ableitung von $H(x)$:

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\arcsin(x) + \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

Die Ableitung von $\arcsin(x)$ ist $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Die Ableitung von $x\sqrt{1-x^2}$ ist:

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Somit ist:

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sqrt{1-x^2}$$

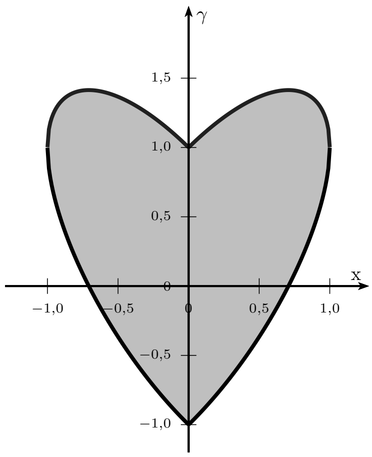
Daher ist $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$.

Eingeschlossene Fläche: Die eingeschlossene Fläche innerhalb der Kurve γ ist die Fläche zwischen $f_2(x)$ und $g(x)$, wobei x von -1 bis 1 geht:

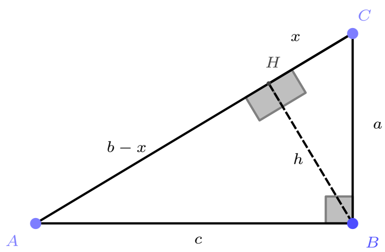
$$A = \int_{-1}^{1} (g(x) - f_2(x))dx = \int_{-1}^{1} \left(2\sqrt{1-x^2}\right) dx$$

Da die Kurve symmetrisch zu $x = 0$ ist, können wir das Integral folgendermaßen berechnen:

$$A = 2\int_{0}^{1} \left(2\sqrt{1-x^2}\right), dx = 2\left[\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \pi$$



Lösung 2024 1. Session Frage 1



Beweis.
Zeige: $a = c \Leftrightarrow h = \overline{BH} = \dfrac{b}{2}$
Von links nach rechts (also $\Rightarrow$)
Voraussetzungen $a = c$; rechter Winkel bei B und zwei rechte Winkel beim Höhenfußpunkt H:
Mit den Abkürzungen $\overline{HC} = x$ und $\overline{HA} = b - x$ erhalten wir
$h^2 = c^2 - (b-x)^2 = a^2 - x^2$ (Pythagoras)
mit $a = c$ können wir in der letzten Gleichung c^2 und a^2 streichen
$\Rightarrow (b-x)^2 = x^2 \Rightarrow b^2 - 2bx = 0 \Rightarrow 2b\left(\frac{b}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{b}{2}$
Von rechts nach links (also $\Leftarrow$)
Voraussetzungen: $h = \overline{BH} = \dfrac{b}{2}$, rechter Winkel bei B und zwei rechte Winkel beim Höhenfußpunkt H:
Aus dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke folgt:
$h^2 = (b-x)\cdot x \Rightarrow \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = (b-x)\cdot x \Rightarrow \dfrac{b^2}{4} = bx - x^2 \Rightarrow \dfrac{b^2}{4} - bx + x^2 = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{b}{2} - x\right)^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{b}{2} = x$
Da die beiden Dreiecke AHB und BHC rechtwinklig sind und die gleichen Katheten haben, sind auch ihre Hypotenusen gleich (Satz des Pythagoras).

$\square$

Lösung 2024 1. Session Frage 2

Bei n Würfen und k-maligem Auftreten des Ereignisses (Einzelwahrscheinlichkeit p) handelt sich um eine Binomialverteilung:
$B_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Würfen 2 Mal Kopf zu werfen, ist daher

$B_2 = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$

Diese Wahrscheinlichkeit (für sie gilt $0 \leqq p_2 \leqq 1$) soll nun maximiert werden. Dazu leiten wir die Formel nach p ab!

$B_2'(p) = 10[2p(1-p)^3 + p^2 \cdot 3 \cdot (1-p)^2 \cdot (-1) = 10[2p(1-p)^3 - 3p^2(1-p)^2] = 10p(1-p)^2[2(1-p) - 3p] = 10p(1-p)^2(2-5p)$
Diese Ableitungsfunktion 3. Grades hat Nullstellen bei $p = 0$ und $p = 1$ (Randstellen) und $p = \frac{2}{5}$
Bei $p = \frac{2}{5}$ wechselt die Ableitungsfunktion von positiv auf negativ, also handelt es sich um ein relatives Maximum.
Der Wert der Wahrscheinlichkeit ist dort $B_2(p = 2/5) = \binom{5}{2}(2/5)^2(3/5)^3 = \frac{216}{625} = 0{,}3456$
An den Rändern ist die Wahrscheinlichkeit 0, daher handelt es sich an der Stelle $p = \frac{2}{5}$ um das absolute Maximum.

Lösung 2024 1. Session Frage 3

Ein Normalenvektor auf die Ebene lautet:
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Damit erhalten wir eine Gleichung der Geraden durch den Punkt $P(4; 2; 1)$ senkrecht zur Ebene:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3\lambda \\ 2-2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$
Diese Gerade schneiden wir mit der Ebene:
$3(4+3\lambda) - 2(2-2\lambda) + 5 = 0 \Rightarrow 13\lambda = -13 \Rightarrow \lambda = -1$
Eingesetzt in die Geradengleichung erhalten wir den Punkt $H = (1; 4; 1)$

Der Schnitt der Geraden mit der Ebene ergibt ein lineares 3x3 Gleichungssystem:
$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$
Mit geeignetem Verfahren oder direkt mit dem Taschenrechner erhalten wir den Schnittpunkt $(-3; -2; 2)$

Lösung 2024 1. Session Frage 4

Wir untersuchen das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^3 + x - \cos x$.
Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin(x)$.
Da $-1 \leqq \sin(x) \leqq 1$ gilt, ist $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin(x) \geqq 3x^2 \geqq 0$, wobei die Gleichheit nur für x=0 möglich wäre.
Für $x = 0$ gilt aber $f'(0) = 1$
Daher ist die erste Ableitung immer größer als 0 und die Funktion ist streng monoton steigend. Diese Funktion hat daher genau eine Nullstelle (kann über den Zwischenwertsatz von stetigen Funktionen bewiesen werden).
Es bleibt noch zu zeigen, dass die Nullstelle einen positiven Wert hat.
Nachdem die Funktion stetig ist, verwenden wir den Nullstellensatz: Wechselt eine Funktion in einem Intervall das Vorzeichen, dann hat sie dort eine Nullstelle.
$f(0) = -1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 > 0$
Damit muss die Nullstelle positiv sein.

Lösung 2024 1. Session Frage 5

Ein Polynom 4. Grades lässt sich folgendermaßen schreiben:
$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Nun werden die Angaben eingebaut:
Der Graph berührt im Ursprung die x-Achse:
Der Ursprung liegt somit auf der Kurve, es gilt $p(0) = 0$.
Außerdem ist dort die x-Achse Tangente:
$p'(0) = 0$
Der Graph der Funktion geht durch (1; 0)
$p(1) = 0$
Der Graph hat bei $(2; -2)$ einen Extrempunkt, woraus wir 2 Bedingungen erhalten:
$p(2) = -2;$

$p'(2) = 0$. Dies ergibt 5 lineare Gleichungen:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p'(0) = 0 \\ p(1) = 0 \\ p(2) = -2 \\ p'(2) = 0 \end{cases}$$

Nun werden die Funktion und die Ableitung eingesetzt:

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e; \qquad p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{a} \cdot 0^4 + \mathrm{b} \cdot 0^3 + \mathrm{c} \cdot 0^2 + \mathrm{d} \cdot 0 + \mathrm{e} = 0 \\ 4\mathrm{a} \cdot 0^3 + 3\mathrm{b} \cdot 0^2 + 2\mathrm{c} \cdot 0 + \mathrm{d} = 0 \\ \mathrm{a} \cdot 1^4 + \mathrm{b} \cdot 1^3 + \mathrm{c} \cdot 1^2 + \mathrm{d} \cdot 1 + \mathrm{e} = 0 \\ \mathrm{a} \cdot 2^4 + \mathrm{b} \cdot 2^3 + \mathrm{c} \cdot 2^2 + \mathrm{d} \cdot 2 + \mathrm{e} = -2 \\ 4\mathrm{a} \cdot 2^3 + 3\mathrm{b} \cdot 2^2 + 2\mathrm{c} \cdot 2 + \mathrm{d} = 0 \end{cases}$$

Verschiedene Lösungsverfahren oder der Taschenrechner liefern:

$a = 1; \quad b = -\frac{7}{2}; \quad c = \frac{5}{2}; \quad d = 0; \quad e = 0$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $p(x) = x^4 - \dfrac{7}{2}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2$

Lösung 2024 1. Session Frage 6

Zunächst betrachten wir das zugehörige unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt$.

Da $(\dfrac{1}{t})' = -\dfrac{1}{t^2}$, hat das Integral die Form $-\int \cos(g(t)) \cdot g'(t)dt$, mit $g(t) = \dfrac{1}{t}$. Daher gilt:

$$\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt = \int \cos\left(\tfrac{1}{t}\right) \cdot \tfrac{1}{t^2} dt = -\int \cos\left(\tfrac{1}{t}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{t^2}\right) dt = -\sin\left(\tfrac{1}{t}\right) + C$$

Damit gilt $F(x) = \left[-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{a}\right)$.

Angabe: $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{1}{a}) = -\frac{1}{2}$,

Mit $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ erhalten wir:

$\sin\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$

Die Lösungen für diese Gleichung sind $\dfrac{1}{a} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{6}(1 + 12k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ (da a laut Angabe positiv ist) oder $\dfrac{1}{a} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{6}(5 + 12k)$.

$\Rightarrow a = \dfrac{6}{(1 + 12k)\pi} \vee a = \dfrac{6}{(5 + 12k)\pi}$

Außerdem muss laut Angabe $x \geqq a$ sein!

$\dfrac{2}{\pi} \geqq \dfrac{6}{(1 + 12k)\pi} \Rightarrow 1 + 12k \geqq 3 \Rightarrow k \geqq \dfrac{1}{6}$

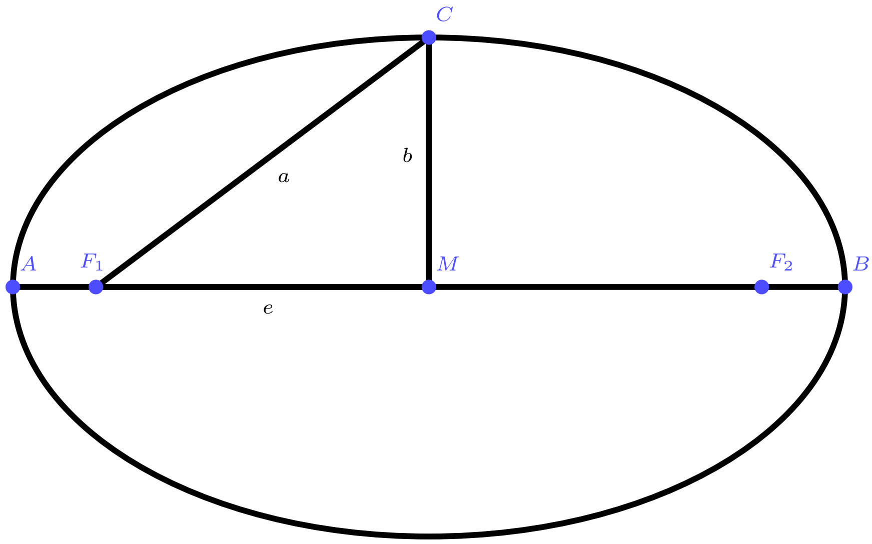
Damit ist für diese Lösung $a = \dfrac{6}{13\pi}$ maximal.

$\dfrac{2}{\pi} \geqq \dfrac{6}{(5 + 12k)\pi} \Rightarrow 5 + 12k \geqq 3 \Rightarrow k \geqq -\dfrac{1}{6}$

Damit ist für diese Lösung $a = \dfrac{6}{5\pi}$ maximal.

Da $\dfrac{6}{5\pi} > \dfrac{6}{13\pi}$, ist der gesuchte Wert $a = \dfrac{6}{5\pi}$

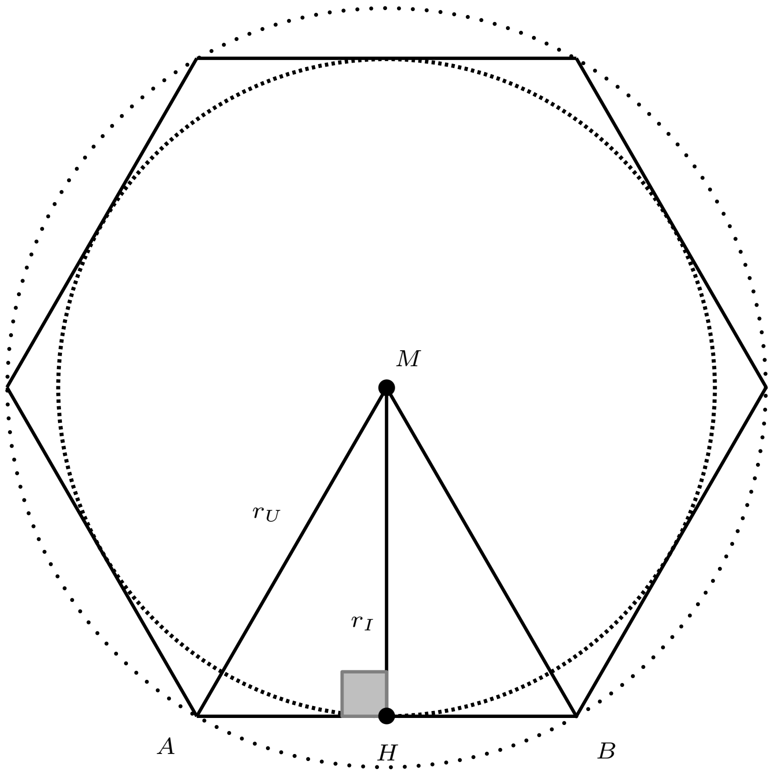
Lösung 2024 1. Session Frage 7



Nach dem ersten Keplerschen Gesetz ist die Umlaufbahn eines Planeten eine Ellipse, in einem Brennpunkt befindet sich die Sonne.
Wir wählen das Koordinatensystem so, dass das Zentrum der Ellipse mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt.
Zur Abkürzung schreiben wir $a_P = 1{,}47 \cdot 10^{11} m; \quad a_A = 1{,}52 \cdot 10^{11} m$
Die große Halbachse ist $a = \dfrac{a_P + a_A}{2} = 1{,}495 \cdot 10^{11} m$
$e = \dfrac{a_A - a_P}{2} = 0{,}025 \cdot 10^{11} m = 2{,}5 \cdot 10^9 m$
$b^2 = a^2 - e^2 = 2{,}2344 \cdot 10^{22} m^2$
Die Gleichung der Ellipse ist $\dfrac{x^2}{2{,}235025 \cdot 10^{22} m^2} + \dfrac{y^2}{2{,}2344 \cdot 10^{22} m^2} = 1$
Es handelt sich somit fast um einen Kreis.
In der Physik würde man auf die gleiche Stellenanzahl runden.

Lösung 2024 1. Session Frage 8

Das Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken. Der Umkreisradius ist gleich den Dreieckseiten a. Der Inkreisradius ist hingegen gleich der Höhe der gleichseitigen Dreiecke.
Zunächst berechnen wir das Verhältnis:
$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow \dfrac{h}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$
Setzen wir die angegebenen Werte ein, so erhalten wir das Verhältnis $\dfrac{5{,}196 cm}{60 mm} = 0{,}866$.
Damit ist das Verhältnis ziemlich gut getroffen. Dazu wurde der Innendurchmesser auf 10μm genau angegeben (zum Vergleich hat ein Haar eine Dicke von 50-100 μm).



Man kann eine Ebene mit einem regelmäßigen Vieleck parkettieren, falls der Innenwinkel ein Teiler von 360° ist, also $k \cdot \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 360°$

$\Rightarrow k = \dfrac{2n}{n-2} = 2 + \dfrac{4}{n-2}$

Somit muss $n - 2$ ein Teiler von 4 sein.

Folgende ganze Zahlen kommen in Frage: n=-2; 0; 1; 3; 4; 6.

Somit kommen nur das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das regelmäßige 6-Eck für die Parkettierung in Frage.