Arbeit aus Mathematik

1. Session 2025

Realgymnasien

Lösung 2025 1. Session Problemstellung 1

1. Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = k|x|$ mit $k < 0$. Es soll gezeigt werden, dass diese Funktion für jedes k stetig, aber nicht differenzierbar ist.

   1. Stetigkeit

   Die Funktion $f_k(x) = k|x|$ lässt sich schreiben als:

   $$f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{für } x \geq 0 \\ -kx & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

   Beide Teilfunktionen sind linear und somit stetig. Um die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ zu überprüfen, betrachten wir den links- und rechtsseitigen Grenzwert:

   $$\lim_{x \to 0^-} f_k(x) = \lim_{x \to 0^-} (-kx) = 0$$
   $$\lim_{x \to 0^+} f_k(x) = \lim_{x \to 0^+} (kx) = 0$$
   $$f_k(0) = k|0| = 0$$

   Da der links- und der rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmen, ist f_k stetig bei $x = 0$. Insgesamt ist f_k also auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

   2. Differenzierbarkeit

   Aus der Fallunterscheidung folgt:

   $$f_k(x) = \begin{cases} kx & \Rightarrow f_k'(x) = k \quad \text{für } x > 0 \\ -kx & \Rightarrow f_k'(x) = -k \quad \text{für } x < 0 \end{cases}$$

   Für $x \neq 0$ ist die Funktion differenzierbar (es existiert die Ableitung).
   Da $f_k'(x)$ von links und rechts gegen unterschiedliche Werte strebt (weil laut Angabe $k < 0$ ist und daher $k \neq -k$), existiert die Ableitung bei $x = 0$ nicht.

   Fazit:

   Die Funktion $f_k(x) = k|x|$ ist für alle $k < 0$:

   - **stetig** auf ganz $\mathbb{R}$,
   - **nicht differenzierbar** an der Stelle $x = 0$, im restlichen Bereich differenzierbar.

Geometrie von Kreisausschnitten (=Kreissektoren) und dem Graphen der Funktion $f_k(x) = k|x|$

Gegeben sei die Funktion

$$f_k(x) = k|x| \quad \text{mit } k < 0,$$

sowie ein Kreis C_r mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $r > 0$, d. h. mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Wir betrachten den von der Funktion f_k nach unten begrenzten Ausschnitt des Kreises in der Halbebene $y \leqq 0$.

Gesucht sind die zwei Werte für r, für die dieser Kreisausschnitt:

- die Fläche π,
- den Umfang $4 + \pi$

besitzt.

Herleitung der Formeln

Sei φ der Winkel des Kreisausschnitts im Bogenmaß (Radiant), dann gilt:

- Aus dem Verhältnis $\frac{b}{2\pi} = \frac{A}{r^2\pi}$ erhält man für die Fläche A eines Kreisausschnitts:

$$A = \frac{\varphi}{2} r^2$$

- Der Umfang setzt sich zusammen aus:
  - zwei Radien (vom Ursprung zu den Schnittpunkten),
  - und dem Bogen.

$$U = 2r + r\varphi = r(2 + \varphi)$$

Gegeben sind:

$$A = \pi, \quad U = 4 + \pi$$

Einsetzen in die Formeln ergibt:

$$\frac{\varphi}{2} r^2 = \pi \quad (1)$$
$$r(2 + \varphi) = 4 + \pi \quad (2)$$

Aus (1) folgt:

$$\varphi = \frac{2\pi}{r^2}$$

Einsetzen in (2):

$$r\left(2 + \frac{2\pi}{r^2}\right) = 4 + \pi \Rightarrow 2r + \frac{2\pi}{r} = 4 + \pi$$

Beide Seiten mit r multiplizieren:

$$2r^2 + 2\pi = (4 + \pi)r \Rightarrow 2r^2 - (4 + \pi)r + 2\pi = 0$$

Die quadratische Gleichung lautet:

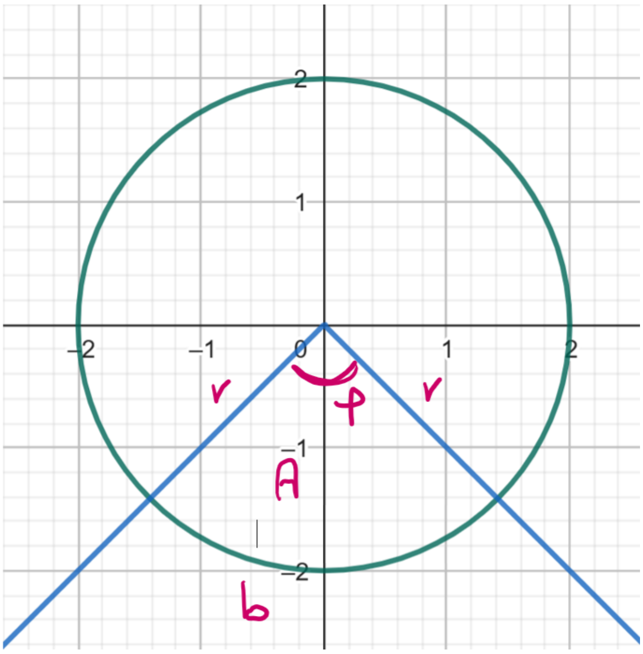
$$2r^2 - (4+\pi)r + 2\pi = 0$$

Wir wenden die Mitternachtsformel an:

$$r = \frac{4+\pi \pm \sqrt{(4+\pi)^2 - 16\pi}}{4} = \frac{4+\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}}{4}$$

$$r_1 = \frac{4+\pi+(4-\pi)}{4} = \frac{8}{4} = 2$$
$$r_2 = \frac{4+\pi-(4-\pi)}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Für $r = 2$ ergibt sich der größere der beiden Werte. In diesem Fall soll der Kreis C_2 sowie der Graph der Funktion $f_{-1}(x) = -|x|$ im Koordinatensystem Oxy dargestellt werden.



2. Gegeben ist die Funktion $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

Definitionsbereich von g

Damit der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, muss gelten:

$4 - x^2 \geqq 0$ und damit $-2 \leqq x \leqq 2$.

Also ist der Definitionsbereich:

$D_g = [-2{,}2]$

Symmetrie

$g(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = g(x)$

Die Funktion ist also gerade und damit symmetrisch zur y-Achse.

Nicht differenzierbare Punkte

Ableitung von g:

$$g'(x) = \frac{-x}{4 - x^2}$$

Differenzierbarkeit:

(a) Im Inneren des Definitionsbereichs ist $g'(x)$ definiert.

(b) An den Randstellen $x = \pm 2$ ist der Nenner $\sqrt{4 - x^2} = 0$, also ist die Ableitung dort nicht definiert.

Nicht differenzierbare Stellen: $x = -2$ und $x = 2$.

Monotonieverhalten

Untersuchen des Vorzeichens von $g'(x) = \dfrac{-x}{4 - x^2}$

- Für $x \in]-2{,}0[$ ist $-x > 0$ und die Wurzel positiv, $g'(x) > 0$, also ist f monoton steigend.
- Für $x \in]0{,}2[$ ist $-x < 0$, $g'(x) < 0$, also ist f dort monoton fallend.

Wertebereich von g

Da $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, ist $g(x) \geqq 0$.

(a) Maximum bei $x = 0$, da dort x^2 minimal ist: $g(0) = \sqrt{4 - 0} = 2$

(b) Minimum bei $x = \pm 2$, da dort x^2 maximal ist und daher der Radikand 0 wird: $g(\pm 2) = \sqrt{4 - 4} = 0$.

$$W_g = [0{,}2]$$

Zusammenhang mit C_2 (Kreis)

Der Kreis C_2 mit Radius 2 hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 4$.

Umgestellt nach y: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

Der Graf der Funktion $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ entspricht genau dem oberen Halbkreis.

Umkehrbarkeit von g

(a) g ist nicht auf ganz $D_g = [-2{,}2]$ umkehrbar, da g nicht streng monoton ist.

(b) Um Umkehrbarkeit zu erreichen, muss man den Definitionsbereich einschränken auf ein Intervall, auf dem g streng monoton (notwendige und hinreichende Bedingung für die Umkehrbarkeit differenzierbarer Funktionen) ist.

Wählt man den Bereich $[0{,}2]$ so ist $b = 2$ und die Funktion in diesem Bereich monoton steigend und deshalb umkehrbar.

Vertauscht man x und y und formt man y um, so erhält man wieder dieselbe Funktion als Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2} = h(x)$.

3. Gegeben:

- Funktion $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (oberer Halbkreis mit Radius 2)
- Punkt A auf g im 1. Quadranten: $A(x, \sqrt{4 - x^2})$ mit $x \in (0, 2)$
- M: Projektion von A auf die x-Achse $\Rightarrow M(x, 0)$

- R: Projektion von A auf die y-Achse $\Rightarrow R(0, \sqrt{4-x^2})$
- O: Ursprung $(0,0)$
- Viereck $AMOR$ ist ein Rechteck (da Projektionen orthogonal zu den Achsen sind)

1. Flächenmaximierung des Vierecks $AMOR$

Fläche F des Rechtecks $AMOR$:

$$F(x) = \text{Länge} \times \text{Höhe} = x \times \sqrt{4-x^2}$$

Maximierung:

(a) Ableitung bilden:

$$F'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

(b) Nullstelle von $F'(x)$:

$$4 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = 2 \implies x = \sqrt{2} \quad (\text{da } x > 0)$$

(c) Überprüfung (2. Ableitung oder Vorzeichenwechsel):

- $F'(x) > 0$ für $x < \sqrt{2}$ (steigend)
- $F'(x) < 0$ für $x > \sqrt{2}$ (fallend)
- $\Rightarrow$ Maximum bei $x = \sqrt{2}$

Koordinaten von A:

$$A\left(\sqrt{2}, \sqrt{4-(\sqrt{2})^2}\right) = A\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

2. Überprüfung, dass $AMOR$ ein Quadrat ist:

- Seitenlängen:
  - $AM = \sqrt{2}$ (Höhe)
  - $AR = \sqrt{2}$ (Länge)
- Alle Winkel sind 90° $\Rightarrow$ Quadrat.

3. Maximierung des Umfangs U:

Umfang des Quadrats $AMOR$:

$$U(x) = 2\left(x + \sqrt{4-x^2}\right)$$

Bis auf den Faktor handelt es sich hier um exakt dieselbe Funktion, entsprechend hat sie dieselben Extremwerte.

Das Quadrat $AMOR$ mit $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ hat sowohl maximale Fläche als auch maximalen Umfang.

Zusammenfassung:

- **Punkt A für maximale Fläche/Umfang:** $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- **Viereck $AMOR$:** Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{2}$

- **Maximale Fläche:** $F = 2$
- **Maximaler Umfang:** $U = 4\sqrt{2}$

4. **1. Berechnung von $F(2)$**

   Die Funktion

   $$F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4 - t^2}\, dt$$

   beschreibt die Fläche unter der Halbkreisfunktion mit Radius 2, da $\sqrt{4 - t^2}$ die obere Halbkreislinie ist.

   Somit ergibt sich:

   $$F(2) = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - t^2}\, dt = \text{Fläche eines Halbkreises mit Radius } 2 = \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi$$

   2. Monotonie

   Durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

   $$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-2}^{x} \sqrt{4 - t^2}\, dt\right) = \sqrt{4 - x^2}$$

   Da $\sqrt{4 - x^2} \geqq 0$ für $x \in [-2, 2]$, ist F auf diesem Intervall **monoton wachsend**. Da die Ableitung nur an den Rändern 0 wird und ansonsten positiv ist, ist F streng monoton wachsend auf $(-2, 2)$.

   3. Krümmung Die zweite Ableitung ergibt sich durch:

   $$F''(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{4 - x^2}\right) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

   Krümmungsverhalten:

   - $F''(x) > 0$ für $x < 0$: konvex (linksgekrümmt)
   - $F''(x) < 0$ für $x > 0$: konkav (rechtsgekrümmt)
   - $F''(x) = 0$ bei $x = 0$: Wendepunkt

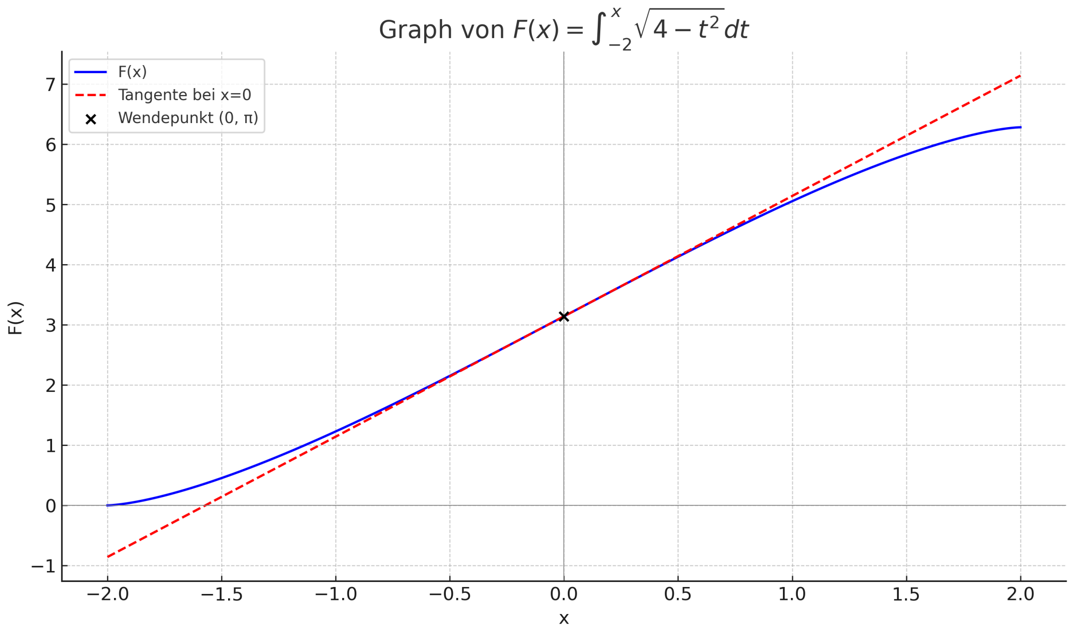
   4. Tangentengleichung am Wendepunkt $x = 0$

   $$\begin{aligned} F(0) &= \int_{-2}^{0} \sqrt{4 - t^2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi \qquad \text{halber Halbkreis mit r=2} \\ F'(0) &= \sqrt{4 - 0^2} = 2 \end{aligned}$$

   Tangente im Punkt $(0, \pi)$:

   $$y = F'(0) \cdot x + F(0) = 2x + \pi$$

   5. Graph



Legende:

- **Blau:** Graph von $F(x)$
- **Rot gestrichelt:** Tangente im Wendepunkt $x = 0$
- **Schwarz:** Wendepunkt $(0, \pi)$

Bemerkung: Die Untersuchung von $F(x)$ kann auch durch die Berechnung des Kreisintegrales durchgeführt werden:
$F(x) = \int\limits_{-2}^{x} \sqrt{4-t^2}\mathrm{dt} = \left[\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{-2}^{x} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \pi$

Lösung 2025 1. Session Problemstellung 2

1.
$$f(x) = p(x)e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x)e^{p(x)}.$$

Da die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ zweiten Grades sind, gilt:

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

mit $a_2 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$.

Gegeben:
$$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Gegeben:
$$f(1) = 0 \Rightarrow a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 \Rightarrow p(x) = a_2x^2 - a_2x$$

Gegeben:
$$f'(\varphi) = 0.$$

Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = (2a_2x-a_2)e^{a_2x^2-a_2x} + (a_2x^2-a_2x)(2a_2x-a_2)e^{a_2x^2-a_2x} = (2a_2x-a_2)e^{a_2x^2-a_2x}(1+(a_2x^2-a_2x)) = 0.$$

Einsetzen von φ in die letzte Klammer (die Exponentialfunktion ist nie 0, die erste Klammer 0 gesetzt würde $a_2 = 0$ liefern) ergibt: $1 + a_2(\varphi^2 - \varphi) = 0$ Wer sich noch an den Goldenen Schnitt erinnern kann:

$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, ansonsten rechnet man den Wert der Klammer für $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ händisch aus. $\Rightarrow a_2 = -1$.

Also:

$$p(x) = -x^2 + x.$$

Für $g(x)$ gilt:

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g(-\varphi) = 0.$$

$$g(x) = (b_2x^2 + b_1x + b_0)e^{-x^2+x}$$

Aus $g(0) = 1$ folgt $b_0 = 1$
$g'(x) = (2b_2x + b_1)e^{-x^2+x} + (b_2x^2 + b_1x + 1) \cdot (12x)e^{-x^2+x} = e^{-x^2+x}(2b_2x + b_1 + b_2x^2 + b_1x + 1 - 2b_2x^3 - 2b_1x^2 - 2x)$
Aus $g'(0) = 0$ folgt $b_1 = -1$
Aus $g(-\varphi) = 0$ und $g(x) = (b_2x^2 - x + 1)e^{-x^2+x}$ folgt:
$0 = [b_2(-\varphi)^2 - (-\varphi) + 1]e^{-(-\varphi)^2-\varphi} = (b_2\varphi^2 + \varphi + 1)e^{-\varphi^2-\varphi} = 0$
$\Rightarrow b_2 = \dfrac{-\varphi - 1}{\varphi^2} = -1$
$\Rightarrow q(x) = -x^2 - x + 1.$

2. Untersuchung der Funktion $f(x) = (x - x^2) \cdot e^{x-x^2}$.

   - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, überall stetig und differenzierbar (da es sich um ein Produkt differenzierbarer Funktionen handelt).

   - nicht achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ($f(-x) \neq f(x)$) und nicht punktsymmetrisch bezüglich Ursprung, da $f(-x) \neq -f(x)$

   - Nullstellen: $x = 0, x = 1$.

   - positiv: für $0 < x < 1$, da der Faktor mit der Exponentialfunktion immer positiv ist.

   - Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x - x^2)e^{x-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x - x^2}{e^{x-x^2}} = 0$, da die Exponentialfunktion schneller wächst als die Polynomfunktionen, also existiert eine horizontale Asymptote $y = 0$
   Der Grenzwert lässt sich mit de L'Hospital zeigen (Form $\frac{\infty}{\infty}$) handelt:
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x - x^2) \cdot e^{x-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x - x^2}{e^{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1 - 2x}{(2x - 1) \cdot e^{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-1}{e^{x^2-x}} = 0$
   Nur beim zweiten Gleichheitszeichen wird der Satz angewandt, die weitere Vereinfachung erfolgt durch Kürzen!

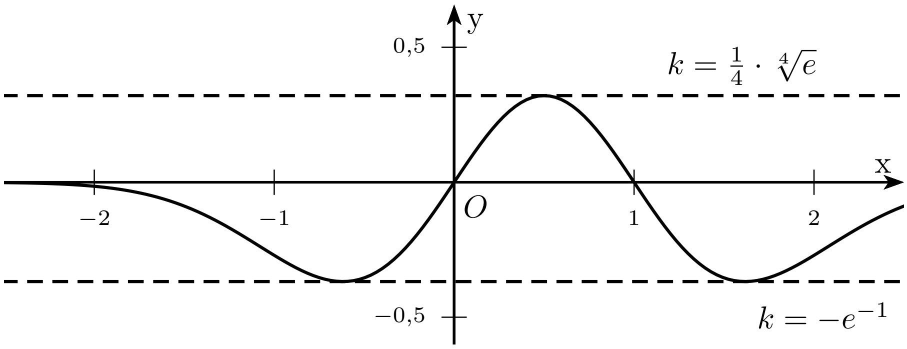
   - erste Ableitung:
   $$f'(x) = (1 - 2x)(x - x^2 + 1)e^{x-x^2}$$
   Extrema (erste Ableitung 0 setzen) bei $x = 0{,}5, x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, Maximum bei $x = 0{,}5$, da dort die erste Ableitung ihr Vorzeichen von + nach - wechselt; Minimum bei $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, da dort die erste Ableitung ihr Vorzeichen von - nach + wechselt (eventuell auch mit der 2. Ableitung überprüfbar).

   - Werte:
   $$f\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1}{e}, \quad f(0{,}5) = \frac{\sqrt[4]{e}}{4} \Rightarrow \text{Wertemenge: } \left[-\frac{1}{e}, \frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right]$$

   - Zweite Ableitung:
   $$f''(x) = x(x - 1)(-4x^2 + 4x + 9)e^{x-x^2}$$
   Wendestellen bei $x = 0, x = 1, x = \frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$.
   Die Wendepunkte sind $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2}; -\frac{9}{4}\,e^{-\frac{9}{4}}\right)$; $(0; 0)$; $(1; 0)$; $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{2}; -\frac{9}{4}\,e^{-\frac{9}{4}}\right)$

- Symmetrie zur Achse $x = 0{,}5$ vorhanden, da $f(1-x) = f(x)$:
  $f(1-x) = (1-x-(1-x)^2)e^{1-x-(1-x)^2} = (x-x^2)e^{x-x^2} = f(x)$ Warum setzen wir $1-x$ ein? Spiegeln wir einen Punkt P an der Geraden $x = 0{,}5$ und erhalten den Bildpunkt P_B, so ist der Mittelwert der x-Werte beider Punkte gleich 0,5.
  $\dfrac{x_P + x_B}{2} = 0{,}5 \Rightarrow x_B = 1 - x_P$

- Die Anzahl der Lösungen von $f(x) = k$ abhängig von k finden wir durch die Extremstellen des Graphen:



  - keine Lösung für $k > \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$
  - 1 Lösung für $k = \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$
  - 2 Lösungen für $0 \leqq k < \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$
  - 4 Lösungen für $-\frac{1}{e} < k < 0$
  - 2 Lösungen für $k = -\frac{1}{e}$
  - keine Lösung für $k < -\frac{1}{e}$

3. Die Nullstellen von $g(x) = (1-x-x^2)e^{x-x^2}$ sind:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Hierzu haben wir das Polynom 0 gesetzt. Zu zeigen ist noch, dass $\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{4}{2(1+\sqrt{5})} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\varphi}$
Leichter erfolgt das Nachrechnen mit Hilfe des Satzes von Vieta: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$
Die erste Lösung ist laut Angabe $-\varphi$, $c = 1$, $a = -1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{-1}{x_1} = \dfrac{1}{\varphi}$

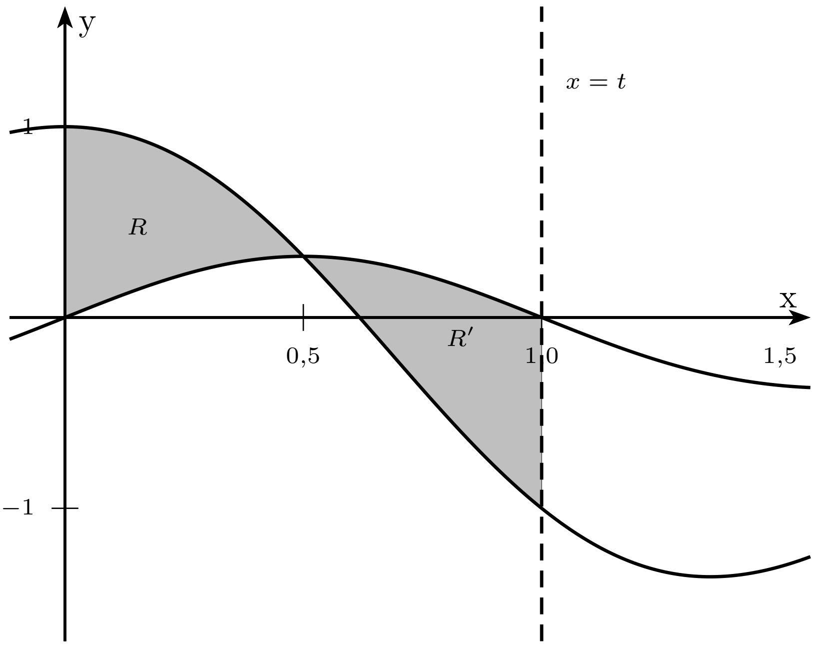
Falls die Geraden g_{AC} und g_{BC} senkrecht zueinander sind, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig bei C.
$k_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{1-0}{0-(-\varphi)} = \dfrac{1}{\varphi}$
$k_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{1-0}{0-(\frac{\sqrt{5}-1)}{2})} = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$
$k_{AC} \cdot k_{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \dfrac{2}{1-\sqrt{5}} = -1$
Die beiden Steigungen sind also negativ-reziprok zueinander, die Geraden scheiden sich rechtwinklig, also ist das Dreieck in C rechtwinklig.

Schnittstelle der beiden Funktionen: $f(x) = g(x) \Rightarrow x - x^2 = 1 - x - x^2 \Rightarrow x = 0{,}5$.

Der Abstand der Punkte $P_1(x, f(x))$ und $P_2(x, g(x))$ ist:

$$h(x) = |f(x) - g(x)| = |2x - 1|e^{x-x^2}$$

Für $x > 0{,}5$ ist das Betragszeichen nicht notwendig. Das Extremum erhält man durch Ableiten:
$h'(x) = 2e^{x-x^2} + (2x-1)(1-2x) \cdot e^{x-x^2} = (-4x^2 + 4x + 1) \cdot e^{x-x^2} = 0$
Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}}$
An dieser Stelle wechselt die Ableitungsfunktion von + nach - (betrachte dazu $-4x^2 + 4x + 1$, da die Exponentialfunktion immer positive Werte liefert)

4. 

Die Fläche der Region R, die in der Abbildung dargestellt ist, beträgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)e^{x-x^2}\,dx = \left[e^{x-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} - 1 = \sqrt[4]{e} - 1$$

Die Stammfunktion ergibt sich durch Substitution: $z := x - x^2$ (man sieht hier: im Integranden ist die Ableitung des Exponenten als Faktor enthalten! Daher ist die Stammfunktion so einfach!)

Die Fläche der Region R' (in Abhängigkeit von t) ist:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{t} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{t} -(1-2x)e^{x-x^2}\,dx = \left[-e^{x-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{t} = \sqrt[4]{e} - e^{t-t^2}$$

Wir setzen die Flächen der Regionen R und R' gleich, um t zu bestimmen:

$$\sqrt[4]{e} - 1 = \sqrt[4]{e} - e^{t-t^2} \Rightarrow e^{t-t^2} = 1 \Rightarrow t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ oder } t = 1$$

Da $t \geqq \frac{1}{2}$ sein muss, ist die einzige zulässige Lösung $t = 1$.

Lösung 2025 1. Session Frage 1

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften:

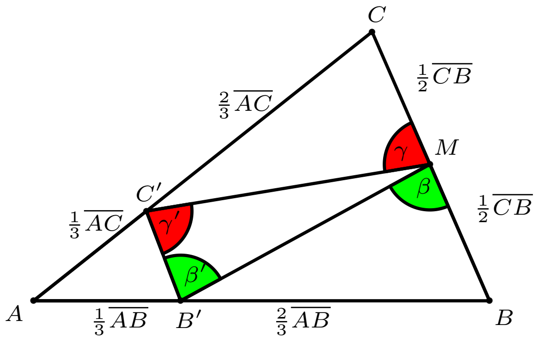
- M ist der Mittelpunkt der Seite BC,
- Punkt B' liegt auf der Seite AB mit $AB' = \frac{1}{3}AB$,
- Punkt C' liegt auf der Seite AC mit $AC' = \frac{1}{3}AC$.

Zu zeigen: Die Seiten AB und AC sind kongruent, wenn die Strecken MB' und MC' kongruent sind.

Die Aufgabe kann elementargeometrisch oder auch mit Hilfe der Analytischen Geometrie gezeigt werden.

Elementargeometrisch:
Voraussetzung:

- $MC' = MB'$ (kongruent bedeutet gleich lang)
- $MB = MC$ (M ist Mittelpunkt der Strecke BC)
- $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{1}{3}$ und $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{1}{3}$



Aus Punkt 3 folgt $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{AB'}{AB}$ und damit auch

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB}.$$

Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt, dass die Strecken $B'C'$ und BC parallel sind, da AB und AC im gleichen Verhältnis geteilt werden!

Damit sind die Winkel γ' und γ bzw. β' und β jeweils gleich groß, da es sich um Z-Winkel handelt.

Laut Voraussetzung ist $MC' = MB'$. Damit ist das Dreieck $B'MC'$ gleichschenklig und deshalb gilt $\beta' = \gamma'$, also auch $\beta = \gamma$.

Daraus folgt, dass die Dreiecke $\triangle C'MC$ und $\triangle B'MB$ kongruent sind, da diese Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (SWS-Satz).

Damit sind die Seiten $C'C$ und $B'B$ gleich lang, also $\dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2}{3}AB$ und deshalb $AC = AB$. $\blacksquare$

Mit Hilfe der Analytischen Geometrie:

Wir wählen ein Koordinatensystem mit:

$$A = (0, 0)$$
$$B = (b, 0)$$
$$C = (x_c, y_c)$$

Weitere Punkte:

$$M = \left(\frac{b + x_c}{2}, \frac{y_c}{2}\right)$$
$$B' = \left(\frac{b}{3}, 0\right)$$
$$C' = \left(\frac{x_c}{3}, \frac{y_c}{3}\right)$$

Die Quadrate der Abstände sind:

$$MB'^2 = \left(\frac{b + x_c}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b + 3x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2}\right)^2$$
$$MC'^2 = \left(\frac{b + x_c}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2} - \frac{y_c}{3}\right)^2 = \left(\frac{3b + x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{6}\right)^2$$

Laut einer Voraussetzung sind diese Quadrate gleich!

$$\left(\frac{b + 3x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2}\right)^2 = \left(\frac{3b + x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{6}\right)^2$$

Multipliziert man beide Seiten mit 36:

$$(b + 3x_c)^2 + (3y_c)^2 = (3b + x_c)^2 + (y_c)^2$$

Daraus erhalten wir durch Vereinfachen $b^2 = x_c^2 + y_c^2$

Also:

$$AB^2 = AC^2; AB = AC$$

Die Aussage ist damit bewiesen. ■

Lösung 2025 1. Session Frage 2

Lage einer Ebene zur Kugel Gegeben ist die Kugeloberfläche mit Gleichung:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1$$

Dies ist eine Kugel mit:

- Mittelpunkt $M = (1, 2, 0)$
- Radius $r = 1$

Gegeben ist außerdem die Ebene π mit Gleichung:

$$x - 2y - 2z + d = 0$$

1. Abstand des Mittelpunktes zur Ebene Die allgemeine Formel für den Abstand eines Punktes $M(x_0, y_0, z_0)$ von der Ebene $ax + by + cz + d = 0$ lautet:

$$\text{Abstand} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Einsetzen von:

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -2, \quad d = d, \quad M = (1, 2, 0)$$

ergibt:

$$\text{Abstand} = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - 4 + d|}{\sqrt{9}} = \frac{|d - 3|}{3}$$

2. Lage der Ebene relativ zur Kugel

- **Ebene schneidet die Kugel:**

$$\frac{|d - 3|}{3} < 1 \Rightarrow |d - 3| < 3 \Rightarrow 0 < d < 6$$

- **Ebene berührt die Kugel (Tangentialebene):**

$$\frac{|d - 3|}{3} = 1 \Rightarrow |d - 3| = 3 \Rightarrow d = 0 \text{ oder } d = 6$$

- **Ebene liegt außerhalb der Kugel:**

$$\frac{|d - 3|}{3} > 1 \Rightarrow |d - 3| > 3 \Rightarrow d < 0 \text{ oder } d > 6$$

3. Ebene halbiert die Kugel Damit die Ebene die Kugel in zwei gleich große Teile teilt, muss sie durch den Mittelpunkt der Kugel verlaufen. Also:

$$\frac{|d - 3|}{3} = 0 \Rightarrow |d - 3| = 0 \Rightarrow d = 3$$

Die Ebene halbiert die Kugel genau dann, wenn:

$$\boxed{d = 3}$$

Lösung 2025 1. Session Frage 3

Beide Terme sind für sich stetig und differenzierbar, zu untersuchen ist der „Übergang“ bei $x = 0$.

1. Untersuchung auf Stetigkeit bei $x = 0$ Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -4(0)^2 - 8(0) = 0$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 + \tan\left(0 + \frac{3}{4}\pi\right) = 1 + \tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - 1 = 0$$

Da beide Grenzwerte übereinstimmen, ist f stetig an der Stelle $x = 0$.

2. Untersuchung auf Differenzierbarkeit bei $x = 0$ Ableitung von links:

$$f_1(x) = -4x^2 - 8x \Rightarrow f_1'(x) = -8x - 8 \Rightarrow f_1'(0) = -8$$

Ableitung von rechts:

$$f_2(x) = 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \Rightarrow f_2'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)} \Rightarrow f_2'(0) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right)}$$

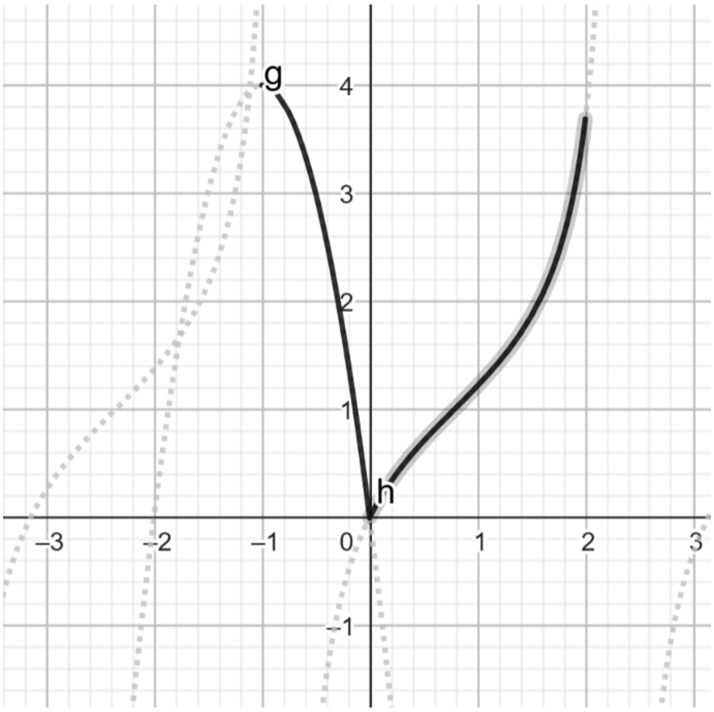
Da

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow f_2'(0) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Die Ableitungen stimmen nicht überein, daher ist f nicht differenzierbar bei $x = 0$.

Fazit: Die Funktion f ist auf dem Intervall $[-1, 2]$ **stetig**, aber **nicht differenzierbar** an der Stelle $x = 0$.

Graph der Funktion:



Lösung 2025 1. Session Frage 4

Gegeben ist die Funktion:

$$y = g(x) \cdot \sin^2 x$$

mit den Bedingungen:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \quad \text{und} \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Gesucht ist die Gleichung der Normalen an die Kurve im Punkt mit Abszissenwert $x = \frac{\pi}{4}$.

1. Ableitung von y Mit der Produktregel ergibt sich:

$$y' = g'(x) \cdot \sin^2 x + g(x) \cdot 2 \sin x \cos x$$

Da $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, folgt:

$$y' = g'(x) \cdot \sin^2 x + g(x) \cdot \sin(2x)$$

2. Funktions- und Ableitungswert an $x = \frac{\pi}{4}$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

3. Gleichung der Normalen Die Steigung der Tangente ist $m_T = 3$, daher ist die Steigung der Normalen:

$$m_N = -\frac{1}{3}$$

Die Normale verläuft durch den Punkt $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, also ergibt sich die Gleichung in Punkt-Steigungs-Form:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Umgestellt zur expliziten Geradengleichung:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12} + 1$$

Antwort

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12} + 1}$$

Lösung 2025 1. Session Frage 5

Damit die Graphen der Funktionen $y = f(x) = e^x$ und $y = g(x) = 6 - ke^{-x}$ einander berühren, muss bei der Berührstelle x folgendes Gleichungssystem erfüllt sein:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Aus:
$$f'(x) = e^x \quad \wedge \quad g'(x) = ke^{-x},$$
ergibt sich: $e^x = ke^{-x} \Rightarrow e^{2x} = k \Rightarrow e^x = \sqrt{k}$

Einsetzen in $f(x) = g(x)$ ergibt:
$\sqrt{k} = 6 - \dfrac{k}{\sqrt{k}} = 6 - \sqrt{k} \Rightarrow \sqrt{k} = 3 \Rightarrow k = 9$
Berührpunkt: $y = 6 - \sqrt{k} = 3$; $e^x = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$, also ist der Berührpunkt $(\ln(3); 3)$.

Lösung 2025 1. Session Frage 6

Die Tangente und der Graph der Funktion f verlaufen durch den Berührungspunkt T, dessen Abszisse Null ist. Einsetzen in die Gerade $y = 2x + 3$ liefert:

$$y_T = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

Da bei Berührung die Steigungen gleich sind, ist bei $x = 0$ die Geradensteigung (k=2) gleich der Ableitung der Funktion.
Damit f die Gerade berührt und das Integral passt, muss gelten:

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 2 \\ \int_0^3 f(x)\,dx = 9 \end{cases}$$

Die Gerade selbst erfüllt dies nicht:

$$\int_0^3 (2x + 3)\,dx = \left[x^2 + 3x\right]_0^3 = 18 \neq 9$$

Wir probieren es mit einem Polynom 2. Grades:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + bf(0) = 3 \Rightarrow c = 3, f'(0) = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = ax^2 + 2x + 3$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_0^3 = 9a + 18 = 9 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

Dieses Polynom erfüllt alle gewünschten Eigenschaften. Natürlich erfüllen Polynome höheren Grades auch diese Eigenschaften. Sie sind mit diesen Angaben aber nicht eindeutig!

Lösung 2025 1. Session Frage 7

Die Menge der Ereignisse für den Wurf von vier vierseitigen Würfeln wird durch die geordneten Quadrupel (a;b;c;d) der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 4 gebildet, welche die möglichen Ergebnisse des Würfelwurfs darstellen. Die Anzahl der möglichen Fälle ist also die Anzahl der Anordnungen mit Wiederholung von vier verschiedenen Elementen der Klasse 4:

$\mathrm{D}_{4,4} = 4^4 = 256$.

- Betrachten Sie das Ereignis "Quadrupel, bei denen sich alle vier Zahlen unterscheiden". Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Permutationen von 4 verschiedenen Elementen:

$P_4 = 4! = 24$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist also

$$p(E_1) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32} \approx 9{,}375\%$$

- Betrachten Sie das Ereignis E_2 alles gleiche Zahlen zu würfeln, also $(1;1;1;1), (2;2;2;2), (3;3;3;3), (4;4;4;4)$.
Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist also:

$$p(E_2) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{4}{256} = \frac{1}{64} \approx 1{,}5625\%$$

Lösung 2025 1. Session Frage 8

- Das Wort STUDIARE besteht aus 8 verschiedenen Buchstaben. Daher ist die Zahl der (teilweise sinnfreien) Anagramme gleich

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Darunter ist auch das Wort STUDIARE selbst.
- Nun betrachten wir die Permutationen der 4 Buchstaben, die nicht in ARTE enthalten sind (also SUDI) und

dem fünften Element, das ARTE ist. Dies entspricht also den Permutationen von 5 Elementen. Die Anzahl der Anagramme ist in diesem Fall

$$P_5 = 5! = 120.$$

- Das Wort VACANZA besteht aus 7 Buchstaben, allerdings sind 3 davon gleich. Also ist es eine Permutation mit Wiederholung und die Zahl der verschiedenen Anagramme ist

$$P_7^{(3)} = \frac{7!}{3!} = 840.$$