



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium

Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und beantworten Sie vier der acht Fragen!

PROBLEMSTELLUNG 1

„Die Vernunft ist nichts ohne Vorstellungskraft“ – René Descartes

Seien $r > 0$ und $k < 0$ gegeben. Der Kreis C_r mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r sowie die Funktion $f_k(x) = k|x|$ werden betrachtet.

- Überprüfen Sie, dass f_k für jeden beliebigen Wert von k stetig, aber nicht differenzierbar in $x = 0$ ist. Bestimmen Sie die zwei Werte von r , für die C_r vom Graphen von f_k so eingegrenzt wird, dass sich für geeignete Werte von k , ein Kreisausschnitt in der Halbebene $y \leq 0$ mit Fläche π und Umfang $4 + \pi$ ergibt. Nachdem festgestellt wurde, dass $r = 2$ den größeren dieser Werte angibt, sollen in demselben Kartesischen Koordinatensystem Oxy der Kreis C_2 und der Graph der Funktion f_{-1} gezeichnet werden.
- Untersuchen Sie die Funktion $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, indem Definitionsbereich, Symmetrie, nicht differenzierbare Punkte, Monotonieverhalten und Wertebereich angegeben werden. Überprüfen Sie, dass der Graph von g mit dem Teil des Graphen von C_2 übereinstimmt, der sich auf der Halbebene $y \geq 0$ befindet. Erklären Sie, wieso g nicht im Definitionsbereich umkehrbar ist und geben Sie das größtmögliche Intervall $[a; b]$ mit $b > 0$ an, in dem g eine Umkehrfunktion von h ist. Geben Sie die Funktionsgleichung für h an.
- Sei A ein Punkt des Graphen von g , der sich im 1. Quadrant befindet. Seien außerdem M und R die orthogonalen Projektionen dieses Punktes auf den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie die Koordinaten von A , sodass das Viereck $AMOR$ die größtmögliche Fläche einnimmt. Nachdem überprüft wurde, dass es sich dabei um ein Quadrat handelt, soll gezeigt werden, dass ebendieses auch den maximalen Umfang hat.
- Man betrachte die Funktion $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4 - t^2} dt$ mit $x \in [-2; 2]$. Bestimmen Sie $F(2)$ und zeichnen Sie den Graphen von F , nachdem diese Funktion auf Monotonie und Krümmung untersucht worden ist. Schreiben Sie außerdem die Gleichung der Tangente an den Graphen von F in ihrem Wendepunkt.



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

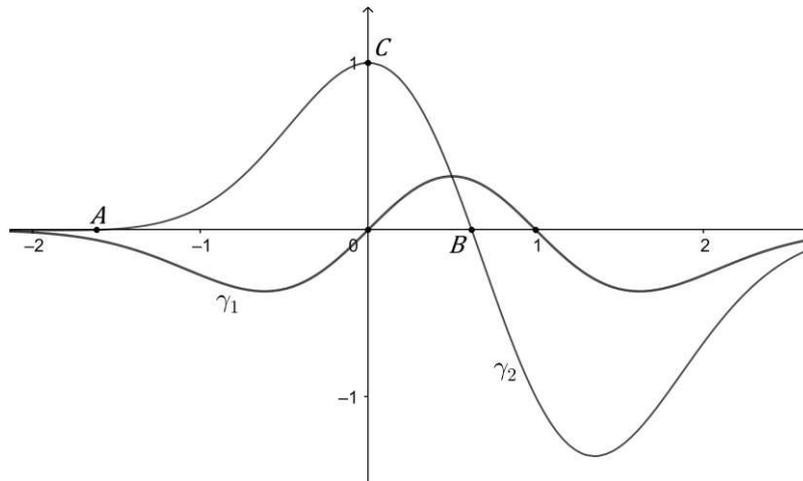
Realgymnasium

Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

PROBLEMSTELLUNG 2

„Schönheit bedeutet, in richtigen Proportionen, Unendlichkeit und Endlichkeit zu mischen“ – Platon
zugeschrieben



Die Graphen γ_1 und γ_2 stellen die Funktionen f und g dar, die auf \mathbb{R} definiert sind und wie folgt angegeben werden:

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

mit $p(x)$ e $q(x)$ Polynomen zweiten Grades.

- Bestimmen Sie die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ durch Verwendung von Informationen, die aus der Abbildung abgelesen werden können, wenn zusätzlich bekannt ist, dass $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der Abszissenwert eines lokalen Extrempunktes von f ist und $-\varphi$ der Abszissenwert vom Punkt A ist, der einer Nullstelle von g entspricht.
- Sei $p(x) = x - x^2$ gegeben. Untersuchen Sie die Funktion f indem insbesondere die Gleichung der Asymptote sowie die x -Werte der lokalen Extremwerte und Wendepunkte angegeben werden. Überprüfen Sie außerdem, dass die Gerade $x = \frac{1}{2}$ Symmetrieachse für γ_1 ist. Bestimmen Sie den Wertebereich von f und geben Sie, in Abhängigkeit vom reellen Parameter k , die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = k$ an.
- Nachdem bestimmt wurde, dass $q(x) = 1 - x - x^2$ ist, soll überprüft werden, dass $\frac{1}{\varphi}$ die zweite Nullstelle von g ist und dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Zeigen Sie, dass γ_1 und γ_2 einen einzigen Schnittpunkt haben und geben Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes an. Seien P_1 und P_2 die entsprechenden Punkte auf γ_1 e γ_2 mit gleichem Abszissenwert $x \geq \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die maximale Länge des Abschnitts P_1P_2 .



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium

Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

- d) Bestimmen Sie die Fläche R , die von γ_1, γ_2 und der Ordinate eingeschlossen wird. Ermitteln Sie anschließend den Wert für $t \geq \frac{1}{2}$, sodass die Gerade $x = t$ mit den zwei Graphen eine Fläche R' einschließt, die der Fläche R entspricht.

FRAGESTELLUNGEN

1. Sei ein Dreieck ABC gegeben. Sei M der Mittelpunkt der Seite BC . B' und C' werden als entsprechende Punkte auf den Seiten AB und AC definiert, sodass $AB' = \frac{1}{3}AB$ und $AC' = \frac{1}{3}AC$ sind. Zeigen Sie, dass die Seiten AB und AC kongruent sind, wenn die Strecken MB' und MC' untereinander kongruent sind.
2. Man betrachte die Kugeloberfläche mit Gleichung $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1$ und die Ebene π mit Gleichung $x - 2y - 2z + d = 0$. Beim Ändern des reellen Parameters d , soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Ebene π die Kugeloberfläche schneidet, berührt oder vollständig außerhalb der Kugeloberfläche liegt. Bestimmen Sie den Wert für d , sodass π die Kugel in zwei gleiche Teile unterteilt.

3. Das futuristische Kunstwerk von Boccioni "*Einzigartige Formen der Kontinuität im Raum*" aus dem Jahr 1913, das auf der 20-Cent Münze abgebildet ist, stellt einen Mann dar, der sich schnell im Raum bewegt. Der Teil des in der Abbildung hervorgehobenen Profils, kann in einem angemessenen Koordinatensystem mit der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

angenähert werden. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f , nachdem diese auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Intervall $[-1; 2]$ untersucht wurde.



4. Sei g eine in \mathbb{R} differenzierbare Funktion und so definiert, dass $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Normalgeraden an die Kurve $y = g(x) \sin^2 x$ durch den Punkt mit Abszissenwert $\frac{\pi}{4}$.



Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

5. Bestimmen Sie den Wert des reellen Parameters k , sodass sich die zwei Kurven $y = e^x$ und $y = 6 - ke^{-x}$ gegenseitig berühren, und geben Sie zusätzlich die Koordinaten des Berührungspunkts an.
6. Bestimmen Sie eine Polynomfunktion f , sodass die Gerade der Gleichung $y = 2x + 3$ Tangente an den Graphen von f im Punkt mit Abszissenwert 0 ist und $\int_0^3 f(x)dx = 9$ gilt.
7. *Mir scheint etwa, dass gewisse Ereignisse rein zufällig so einträten, wie sie von den Wahrsagern verheißen worden seien; dagegen brachtest du vielerlei über den Zufall vor, so sei es z.B. möglich, dass sich ein „Venus-Wurf“ rein zufällig ergebe, wenn man vier Würfel wirft [...].*
Cicero, *De divinatione*, II, 21, 48 – Basierend auf der Übersetzung von Niklas Holzberg
- Originaltext - *Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis [...].*
- Cicero spricht im Dialog mit dem Bruder Quintus vom Venus-Wurf, unter dem man den Wurf von 4 Würfeln mit je 4 Seitenflächen versteht und dabei 4 unterschiedliche Ergebnisse erhält. Unter der Voraussetzung, dass jede Würfelseite gleich wahrscheinlich ist, bestimmen Sie:*
- die Wahrscheinlichkeit eines Venus-Wurfes beim Wurf mit 4 Würfeln.
 - die Wahrscheinlichkeit, 4 gleiche Zahlen zu würfeln.
8. Wie viele Anagramme, auch ohne Sinn und Bedeutung, gibt es für das Wort „STUDIARE“? In wie vielen dieser Anagramme kann man das Wort „ARTE“ herauslesen, wie z.B. in „SUARTEDI“?

Wie viele Anagramme, auch ohne Sinn und Bedeutung, gibt es für das Wort „VACANZA“?

*„Die Mathematik kennt keine Rassen oder geografischen Grenzen;
für die Mathematik ist die gesamte Kulturwelt ein einziges Land“*

D. Hilbert

Dauer der Arbeit: 6 Stunden

Der Gebrauch wissenschaftlicher und/oder grafischer Taschenrechner ist erlaubt, sofern diese nicht mit einem CAS (Computer Algebra System) oder SAS (Symbolic Algebra System) ausgestattet sind und keine Verbindungsmöglichkeit zum Internet aufweisen.

Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Kandidatinnen und Kandidaten nicht deutscher Muttersprache erlaubt.

Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.