Ministero dell'Istruzione e del Merito
Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Biennio -

211

- SOLUZIONI -

1. Quanti sono, tra i numeri interi che vanno da 1 a 1000, quelli che sono, al tempo stesso, multipli sia di 5, sia di 6 e sia di 9?
   (A) 10 **(B)** 9 **(C)** 15 **(D)** 11 **(E)** 16

   Risposta corretta: **(D)**.

   I numeri cercati sono i multipli del minimo comune multiplo tra 5, 6 e 9, ovvero i multipli di 90. Da 1 a 1000 ce ne sono 11 (l'ultimo è 990). □

2. Carlo, con molta pazienza, sta scrivendo per esteso il numero $100^{200} + 7^{38}$. Quante cifre dovrà scrivere in tutto?
   (A) 2000 **(B)** 438 **(C)** 401 **(D)** 238 **(E)** 2038

   Risposta corretta: **(C)**.

   Si ha $100^{200} = \left(10^2\right)^{200} = 10^{400}$: scrivendolo per esteso, si tratta della cifra 1 seguita da 400 cifre uguali a 0, ossia 401 cifre in tutto. Chiaramente $7^{38} < 10^{400}$, perciò il numero scritto da Carlo è compreso tra 10^{400} e $2 \cdot 10^{400}$, dunque sarà formato da 401 cifre. □

3. Chiara ha molti biglietti colorati, ciascuno contenuto dentro una bustina: si sa che 30 sono rossi, 25 verdi, 33 gialli, 21 azzurri. Prende alcune bustine a caso, senza aprirle (i colori dei biglietti non si vedono dall'esterno). Quante deve prenderne, come minimo, per essere certa di trovare almeno 3 biglietti aventi 3 diversi colori?
   (A) 56 **(B)** 88 **(C)** 79 **(D)** 47 **(E)** 64

   Risposta corretta: **(E)**.

   Prendendo fino a 63 biglietti, essi potrebbero anche (nel caso "peggiore") essere di due soli colori, nel caso essi fossero tra quelli rossi e gialli. Prendendone 64, essi non potranno essere di due soli colori, dato che non ci sono due colori per cui il numero complessivo di biglietti raggiunga 64. Quindi 64 è la minima quantità di biglietti da prendere per essere certi di trovare fra essi biglietti di almeno tre colori differenti. □

4. Quando un recipiente per liquidi è pieno al 75%, esso contiene 44 litri in più rispetto a quando è pieno al 20%. Di quanti litri è la capacità totale del recipiente?
   (A) 80 **(B)** 75 **(C)** 84 **(D)** 72 **(E)** 90

   Risposta corretta: **(A)**.

   Il testo significa che il 55% del recipiente corrisponde a 44 litri. In tutto il recipiente avrà quindi la capacità di $44 \cdot \frac{100}{55} = 80$ litri. □

5. Michela vorrebbe scrivere sotto forma di numero decimale la frazione $\dfrac{3}{7}$. Quale cifra occuperà il millesimo posto dopo la virgola?
   (A) 4 **(B)** 5 **(C)** 2 **(D)** 7 **(E)** 8

   Risposta corretta: **(B)**.

   Dato che $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$, con un periodo di lunghezza 6, occorre stabilire qual è il resto che si trova dividendo 1000 per 6. Il più grande multiplo di 6 minore di 1000 è 996 ed il resto è quindi 4. Poiché la quarta cifra del periodo è 5, questa sarà la cifra che occupa il millesimo posto. □

6. Per il compleanno di Riccardo, gli amici hanno deciso di regalargli due libri di generi differenti. Sono incerti fra 3 libri di poesie, 5 fantasy e 6 horror. In quanti modo possono scegliere il loro regalo di compleanno?
   (A) 33 **(B)** 45 **(C)** 60 **(D)** 63 **(E)** 48

   Risposta corretta: **(D)**.

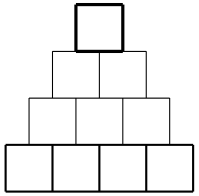
   Sono tre i casi possibili: o comprano un libro di poesie e un fantasy ($3 \cdot 5 = 15$ possibili scelte), o un fantasy e un horror ($5 \cdot 6 = 30$ possibili scelte), oppure un libro di poesie e un horror ($3 \cdot 6 = 18$ possibili scelte). In tutto le scelte possibili sono dunque $15 + 30 + 18 = 63$. □

7. Quale angolo convesso formano le due lancette di un orologio alle ore $12:30$ (supponendo si muovano entrambe a velocità costante)?
   (A) 165° **(B)** 180° **(C)** 168° **(D)** 172° **(E)** 150°

   Risposta corretta: **(A)**.

   A mezzogiorno le due lancette sono nella stessa posizione. Dopo mezz'ora, la lancetta dei minuti avrà percorso mezzo giro (180°). La lancetta delle ore percorre 1/12 di giro ogni ora, ossia un angolo di 30° gradi, per cui in mezz'ora sarà ruotata di 15°. L'angolo compreso tra esse sarà dunque pari a $180° - 15° = 165°$. □

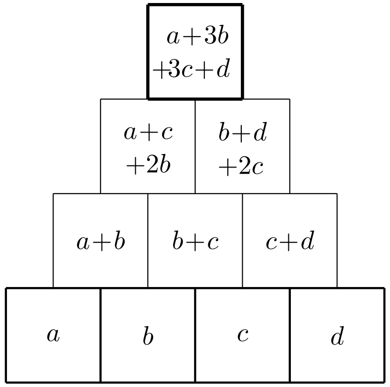
8. Matteo ha disegnato una piramide come quella qui a fianco. Nelle caselle in basso scriverà quattro numeri scelti tra 1, 2, 3, 4, 5 (quattro numeri differenti, in un ordine qualsiasi). Poi riempirà le altre caselle scrivendo in ciascuna di esse la somma dei due numeri sottostanti. Qual è la differenza tra il numero più grande ed il numero più piccolo che Matteo potrebbe scrivere nella casella in cima alla piramide?



(A) 13 **(B)** 12 **(C)** 16 **(D)** 20 **(E)** 14

Risposta corretta: **(C)**.

Una volta scelti i 4 numeri da collocare nella base della piramide, è piuttosto chiaro che, per ottenere nella sommità un valore più grande (o più piccolo) possibile, occorre disporre i numeri più elevati (o più piccoli) nelle caselle centrali e quelli minori (o maggiori) nelle caselle più esterne. Infatti, procedendo con le somme verso i livelli più alti, i numeri posti al centro sono quelli che verranno sommati più volte. Per la precisione, indicando con a, b, c, d i 4 valori posti nella base, nelle diverse caselle si otterrà quanto segue:



Il valore di $a{+}3b{+}3c{+}d = 3(b{+}c) + (a{+}d)$, dato un insieme di 4 numeri da cui trarre a, b, c, d, risulta massimo (o minimo) se è massimo (o minimo) $b+c$.

Bisogna inoltre notare che, tra le 5 possibili scelte di $\{a,b,c,d\} \subset \{1,2,3,4,5\}$, occorrerà selezionare $\{2,3,4,5\}$ per realizzare il valore massimo e $\{1,2,3,4\}$ per ottenere il minimo. Il massimo sarà dunque $M = 3(4+5)+(3+2) = 32$ ed il minimo $m = 3(1+2)+(3+4) = 16$, pertanto $M - m = 16$. □

9. Nel triangolo isoscele RST, dove $\overline{RS} = \overline{ST}$, l'angolo $\widehat{S}$ è di 24°.
L'altezza uscente da R e la bisettrice uscente da T si intersecano nel punto O.
Qual è l'ampiezza dell'angolo convesso $\widehat{ROT}$?

(A) 129° **(B)** 126° **(C)** 125° **(D)** 128° **(E)** 127°

Risposta corretta: **(A)**.

Gli angoli di vertice R e T del triangolo misurano $(180° - 24°)/2 = 78°$. Quindi si ha $\widehat{RT0} = 78°/2 = 39°$ e $\widehat{ORT} = 90° - 78° = 12°$, da cui si conclude che $\widehat{ROT} = 180° - (39° + 12°) = 129°$. □

10. Silvia deve reimpostare il pin della sua carta di credito, costituito da 5 cifre (ciascuna delle quali può essere una qualsiasi cifra da 0 a 9). Per ricordarlo facilmente, farà in modo che ci siano 4 cifre tra loro uguali ed una cifra diversa dalle altre 4.
Quanti sono i possibili pin che rispettano queste condizioni?

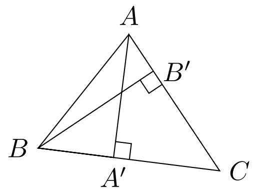
(A) 90 **(B)** 500 **(C)** 450 **(D)** 45 **(E)** 400

Risposta corretta: **(C)**.

Per determinare il nuovo pin, Silvia deve fare tre scelte:
- quale cifra da 0 a 9 sarà quella diversa dalle altre (10 possibili scelte);
- in quale posizione si troverà la cifra diversa dalle altre (5 possibili scelte);
- quale cifra, diversa da quella già scelta, sarà ripetuta 4 volte (9 possibili scelte).

In tutto, le possibilità sono pertanto $10 \cdot 5 \cdot 9 = 450$. □

11. Nel triangolo acutangolo ABC, le altezze AA' e BB' misurano, nell'ordine, 20 e 24 metri. Il lato BC è di 30 metri. Quanti metri misura il perimetro del triangolo ABC?



(A) 85 **(B)** 75 **(C)** 72 **(D)** 80 **(E)** 84

Risposta corretta: **(D)**.

In un triangolo, il prodotto di un lato per la relativa altezza è sempre lo stesso nei tre casi, essendo sempre pari al doppio dell'area. Perciò si ha (in metri) $\overline{AC} = \frac{BC \cdot AA'}{BB'} = \frac{30 \cdot 20}{24} = 25$. Per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo $AA'C$, si ha $\overline{A'C}^{\,2} = \overline{AC}^{\,2} - \overline{AA'}^{\,2}$, da cui $\overline{A'C} = 15$ ed anche $\overline{A'B} = 30 - 15 = 15$. Il triangolo ABC è pertanto isoscele, con $\overline{AB} = \overline{AC}$. Il perimetro è quindi pari a $30 + 25 + 25 = 80$ metri. □

12. Lucia lancia 5 dadi a 12 facce, ciascuna delle quali numerata da 1 a 12, poi moltiplica i 5 numeri usciti. Si accorge che il prodotto ottenuto è un numero primo. Quale potrebbe essere, al massimo, la somma dei 5 numeri usciti?

(A) 13 **(B)** 5 **(C)** 60 **(D)** 12 **(E)** 15

Risposta corretta: **(E)**.

Moltiplicando dei numeri naturali si ottiene un numero primo se e solo se uno dei fattori è primo e gli altri sono tutti 1. La somma massima si avrà quindi se in uno dei dadi esce 11 e negli altri 4 esce 1, per cui tale somma sarà 15. □

13. Alberto e Barbara fanno una gara di braccio di ferro in questo modo: all'inizio hanno entrambi 1 punto; ad ogni sfida, chi vince guadagna tanti punti quanti ne ha l'avversario in quel momento, mentre chi perde mantiene il punteggio che aveva. Dopo un certo numero di sfide, Alberto ha 66 punti.
Quale, tra i seguenti, potrebbe essere il punteggio di Barbara?
(A) 75 **(B)** 55 **(C)** 49 **(D)** 44 **(E)** 52

Risposta corretta: **(C)**.

Possiamo osservare che, tranne la situazione iniziale, il punteggio della gara non sarà mai più in parità, dal momento che il vincente di ogni sfida aggiunge al proprio punteggio tutti i punti dell'avversario sconfitto (che invece rimane fermo al suo punteggio): dunque il vincente si troverà ogni volta ad avere più punti dell'avversario sconfitto. Questo permette di ricostruire a ritroso la sequenza di punteggi (ed i vincitori di ciascuna sfida), a partire dalla situazione di punteggio Alberto-Barbara raggiunta in un qualsiasi momento della gara.

Ad esempio, per la risposta **(B)**, con Barbara a 55 punti, si dovrebbe avere questa sequenza di punteggi a ritroso:

$(66, 55) \rightsquigarrow (11, 55) \rightsquigarrow (11, 44) \rightsquigarrow (11, 33) \rightsquigarrow (11, 22) \rightsquigarrow (11, 11) \rightsquigarrow$ **?**

È chiaro che questa non può essere la corretta ricostruzione della gara: infatti, subito prima di arrivare al punteggio $(11, 11)$ uno dei due avrebbe dovuto essere a 0, cosa impossibile. Qualcosa di analogo avviene anche per le altre risposte, tranne la **(C)**, con Barbara a 49 punti:

$(66, 49) \rightsquigarrow (17, 49) \rightsquigarrow (17, 32) \rightsquigarrow (17, 15) \rightsquigarrow (2, 15) \rightsquigarrow (2, 13) \rightsquigarrow (2, 11) \rightsquigarrow (2, 9) \rightsquigarrow (2, 7) \rightsquigarrow (2, 5) \rightsquigarrow (2, 3) \rightsquigarrow (2, 1) \rightsquigarrow (1, 1)$.

In questo caso, si ricostruisce passo passo l'andamento delle sfide che hanno portato al punteggio $(66, 49)$.

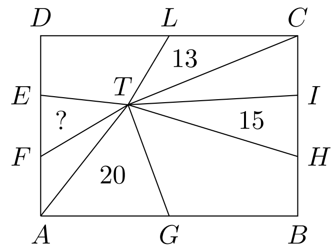
In effetti, si poteva notare fin da subito che, se a un dato momento i due punteggi sono entrambi multipli di un intero n, anche al passo precedente dovevano essere entrambi multipli di tale n: infatti uno dei punteggi precedenti deve rimanere uguale a come sarà al passo successivo e l'altro deve essere la differenza tra i due successivi (la differenza tra due multipli di n è ancora un multplo di n). Per poter risalire alla situazione iniziale $(1, 1)$, i due punteggi devono essere primi tra loro, cosa che avviene solo nel caso **(C)** tra quelli proposti. □

14. In un grande lago ci sono 50 isole, numerate da 2 a 51. Due diverse isole sono collegate da un ponte se e solo se uno dei rispettivi numeri divide l'altro.
Quante sono le isole con un solo ponte?
(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 2 **(E)** 6

Risposta corretta: **(B)**.

Le isole con un solo ponte corrispondono a quei numeri interi che, tra i numeri interi che vanno da 2 a 51, o hanno un solo multiplo (e nessun divisore) o hanno un solo divisore (e nessun multiplo). Nel primo gruppo rientrano i numeri primi 19 e 23; nel secondo gruppo il numero 49: tre in tutto. □

15. Nel rettangolo $ABCD$, i punti E, F, G, H, I, L suddividono i lati in 2 oppure 3 parti uguali, come in figura. Le aree dei triangoli TAG, THI, TCL (espresse in mm^2) sono quelle indicate in figura.
Di quanti mm^2 è l'area del triangolo TEF?



(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 5 **(D)** 8 **(E)** 9

Risposta corretta: **(A)**.

Conviene in primo luogo osservare che, comunque preso un punto P all'interno di un rettangolo $ABCD$, risulta $\mathsf{Area}(PAB)+\mathsf{Area}(PCD) = \frac{1}{2}\mathsf{Area}(ABCD)$, dal momento che la somma delle altezze sui lati AB e CD nei due triangoli corrisponde al lato BC. Perciò si ha (in mm^2) $2(\mathsf{Area}(TAG)+\mathsf{Area}(TCL)) = 66 = \frac{1}{2}\mathsf{Area}(ABCD)$ e anche $3 \cdot (\mathsf{Area}(TEF)+\mathsf{Area}(THI)) = \frac{1}{2}\mathsf{Area}(ABCD)$, da cui segue che $3 \cdot \mathsf{Area}(TEF) = 66 - 3 \cdot 15 = 21$, vale a dire $\mathsf{Area}(TEF) = 7$. □

16. Luigi vuole fare una camminata lungo il bordo di un parco triangolare, i cui lati sono tutti di 1 km. Partendo da un vertice V, con un lancio di moneta sceglie casualmente in quale direzione andare e percorre un intero lato del triangolo. Ogni volta che raggiunge un vertice, fa un nuovo lancio di moneta per scegliere la direzione. Se la camminata sarà di 3 km, qual è la probabilità che si concluda proprio nel vertice V da cui era partito?
(A) 1/6 **(B)** 1/8 **(C)** 1/2 **(D)** 1/3 **(E)** 1/4

Risposta corretta: **(E)**.

Per ritrovarsi al punto di partenza dopo 3 km, occorre procedere sempre nello stesso verso, orario o antiorario, ossia che i risultati del 2° e del 3° lancio indichino lo stesso verso del primo. La probabilità che ciò accada è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. □