Ministero dell'Istruzione e del Merito
Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Triennio -

311

-SOLUZIONI-

1. Quale angolo convesso formano le due lancette di un orologio alle ore $1:20$ (supponendo che si muovano entrambe a velocità costante)?

   (A) 75° **(B)** 80° **(C)** 90° **(D)** 72° **(E)** 84°

   Risposta corretta: **(B)**.

   Alle ore 1:00, la lancetta dei minuti punta verso l'alto (a ore 12) e quella delle ore è ruotata, rispetto a essa, di $1/12$ di giro, cioè di 30°. Dopo altri 20 minuti ($1/3$ di ora), la lancetta dei minuti avrà percorso $1/3$ di giro (si troverà dunque ruotata di 120° rispetto a ore 12), mentre la lancetta delle ore avrà percorso $1/3$ di $1/12$ (ossia $1/36$) di giro, cioè 10° (si troverà dunque ruotata di $30° + 10° = 40°$ rispetto a ore 12). L'angolo compreso tra le due lancette sarà quindi pari a $120° - 40° = 80°$. □

2. Roberta ha molti biglietti colorati, ciascuno contenuto dentro una bustina: si sa che 22 sono rossi, 17 verdi, 13 gialli, 20 azzurri. Prende alcune bustine a caso, senza aprirle (i colori dei biglietti non si vedono dall'esterno). Quante deve prenderne, come minimo, per essere certa di trovare almeno 3 biglietti di un colore ed altri 3 di un altro colore (diverso dal primo)?

   (A) 29 **(B)** 16 **(C)** 26 **(D)** 25 **(E)** 27

   Risposta corretta: **(A)**.

   Prendendo 28 biglietti, se ne potrebbero (nel caso "peggiore") anche trovare: 22 rossi, 2 verdi, 2 gialli, 2 azzurri. Quindi 28 biglietti non sono sufficienti a garantire quanto richiesto. Invece 29 sono sufficienti. Infatti, supponendo che tra essi vi siano almeno 3 rossi, in ogni caso almeno 7 di essi saranno o verdi o gialli o azzurri; se ve ne fossero non più di 2 per colore, dovrebbero però essere al massimo 6. Quindi ce ne saranno almeno 3 di un altro colore, oltre ai 3 rossi. Se, invece, tra i 29 ci fossero meno di 3 rossi, almeno 27 saranno o verdi o gialli o azzurri. Si procede quindi con lo stesso tipo di ragionamento su questi tre colori, fino a giungere alla conclusione. □

3. Carla, con molta pazienza, sta scrivendo per esteso il numero $1000^{300} + 7^{59}$. Quante cifre dovrà scrivere in tutto?

   (A) 959 **(B)** 300 **(C)** 30059 **(D)** 3059 **(E)** 901

   Risposta corretta: **(E)**.

   Si ha $1000^{300} = \left(10^3\right)^{300} = 10^{900}$: scrivendolo per esteso, si tratta della cifra 1 seguita da 900 cifre uguali a 0, ossia 901 cifre in tutto. Chiaramente $7^{59} < 10^{900}$, perciò il numero scritto da Carlo è compreso tra 10^{900} e $2 \cdot 10^{900}$, dunque sarà formato da 901 cifre. □

4. Nel triangolo isoscele DEF, dove $\overline{DE} = \overline{EF}$, l'angolo $\widehat{E}$ è di 32°. L'altezza uscente da D e la bisettrice uscente da F si intersecano nel punto I. Qual è l'ampiezza dell'angolo convesso $\widehat{DIF}$?

   (A) 129° **(B)** 126° **(C)** 128° **(D)** 127° **(E)** 130°

   Risposta corretta: **(D)**.

   Gli angoli di vertice D e F del triangolo misurano $(180° - 32°)/2 = 74°$. Quindi si ha $\widehat{DFI} = 74°/2 = 37°$ e $\widehat{IDF} = 90° - 74° = 16°$, da cui si conclude che $\widehat{DIF} = 180° - (37° + 16°) = 127°$. □

5. Filippo vorrebbe scrivere sotto forma di numero decimale la frazione $\dfrac{8}{13}$. Quale cifra occuperà il millesimo posto dopo la virgola?

   (A) 6 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 5 **(E)** 8

   Risposta corretta: **(C)**.

   Dato che $\frac{8}{13} = 0{,}\overline{615384}$, con un periodo di lunghezza 6, occorre stabilire qual è il resto che si trova dividendo 1000 per 6. Il più grande multiplo di 6 minore di 1000 è 996 ed il resto è quindi 4. Poiché la quarta cifra del periodo è 3, questa sarà la cifra che occupa il millesimo posto. □

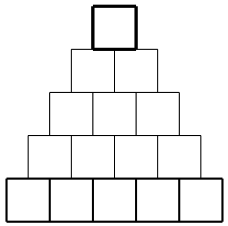
6. Indicare qual è la somma di tutti i numeri reali x per i quali vale l'uguaglianza
   $$(2x+1) \cdot (4x^2 - 7x - 10) \cdot \left((x^3-2)^4 + 1\right) = 0$$

   (A) 0 **(B)** $\dfrac{5}{4}$ **(C)** $\dfrac{7}{2}$ **(D)** $\dfrac{9}{4}$ **(E)** $-\dfrac{1}{2}$

   Risposta corretta: **(B)**.

Per la legge di annullamento del prodotto, gli $x \in \mathbb{R}$ cercati sono quelli per cui si annulla almeno una delle tre espressioni che vengono moltiplicate. Il binomio $2x+1$ si annulla per $x = -\frac{1}{2}$. Il trinomio $4x^2 - 7x - 10$, avendo discriminante positivo, possiede due radici reali distinte (nessuna delle quali uguale a $-\frac{1}{2}$), la cui somma è $\frac{7}{4}$. Infine, il polinomio $(x^3-2)^4+1$ non può annullarsi per $x \in \mathbb{R}$, dal momento che $(x^3-2)^4 \geqslant 0$ per ogni x reale. In conclusione, la somma dei valori cercati è quindi uguale a $-\frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$. □

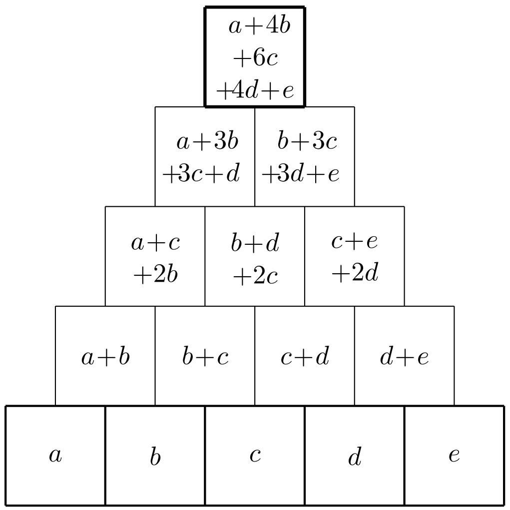
7. Elisa ha disegnato una piramide come quella qui a fianco. Nelle caselle in basso scriverà cinque numeri scelti tra 1, 2, 3, 4, 5, 6 (cinque numeri differenti, in un ordine qualsiasi). Poi riempirà le altre caselle scrivendo in ciascuna di esse la somma dei due numeri sottostanti. Qual è la differenza tra il numero più grande ed il numero più piccolo che Elisa potrebbe scrivere nella casella in cima alla piramide?



(A) 48 **(B)** 36 **(C)** 32 **(D)** 42 **(E)** 52

Risposta corretta: **(D)**.

Una volta scelti i 5 numeri da collocare nella base della piramide, è piuttosto chiaro che, per ottenere nella sommità un valore più grande (o più piccolo) possibile, occorre mettere il valore massimo (o minimo) nella casella centrale e poi valori decrescenti (o crescenti) via via che ci si allontana dalla casella centrale. Infatti, procedendo con le somme verso i livelli più alti, i numeri più vicini al centro sono quelli che verranno sommati più volte. Per la precisione, indicando con a, b, c, d, e i 5 valori posti nella base, nelle diverse caselle si otterrà quanto segue:



Assegnato un insieme di 5 numeri tra cui scegliere a, b, c, d, e, il valore di $a+4b+6c+4d+e = 6c+4(b+d)+(a+e)$ risulterà massimo (o minimo) scegliendo c massimo (o minimo) e quindi, con i numeri restanti, rendendo massimo (o minimo) $b+d$.

Bisogna inoltre notare che, tra le 6 possibili scelte di $\{a,b,c,d,e\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$, occorrerà selezionare $\{2,3,4,5,6\}$ per realizzare il valore massimo e $\{1,2,3,4,5\}$ per ottenere il minimo. Il massimo sarà dunque $M = 6\cdot 6 + 4\cdot(5+4) + (3+2) = 77$ ed il minimo $m = 6\cdot 1 + 4\cdot(2+3) + (4+5) = 35$, pertanto $M - m = 42$.

Nota: nell'espressione $a+4b+6c+4d+e$ compaiano gli stessi coefficienti che si ottengono sviluppando la potenza $(x+y)^4$: un fatto, a ben vedere, alquanto immaginabile. □

8. Quanti sono, tra i numeri interi che vanno da 1 a 2024, quelli che sono, al tempo stesso, multipli sia di 21 che di 28, ma non sono multipli di 15?

(A) 20 **(B)** 23 **(C)** 24 **(D)** 21 **(E)** 19

Risposta corretta: **(A)**.

I numeri che sono multipli sia 21 che di 28 coincidono con i multipli del loro minimo comune multiplo 84. Fino a 2024 ce ne sono $\lfloor 2024 : 84 \rfloor = 24$. Tra questi, quelli che sono anche multipli di 15 coincidono con i multipli di 420 (minimo comune multiplo tra 84 e 15): fino a 2024 ce ne sono $\lfloor 2024 : 420 \rfloor = 4$. Il numero dei multipli di 84 che non sono multipli di 420 è perciò $24 - 4 = 20$. □

9. Giulio sta cercando i numeri interi n tali che il valore assoluto di $(n-2)(n-20)$ sia un numero primo. Qual è la somma di tutti questi numeri n?

(A) 36 **(B)** 40 **(C)** 32 **(D)** 21 **(E)** 44

Risposta corretta: **(E)**.

Affinché il valore assoluto del prodotto tra due numeri interi sia primo è necessario che il valore assoluto di uno degli interi sia 1 (e che l'altro sia primo). Si ha che $|n-2| = 1$ quando $n = 1$ (in tal caso $|n-20| = 19$) e quando $n = 3$ (in tal caso $|n-20| = 17$); si ha $|n-20| = 1$ quando $n = 19$ (in tal caso $|n-2| = 17$) e quando $n = 21$ (in tal caso $|n-2| = 19$). □

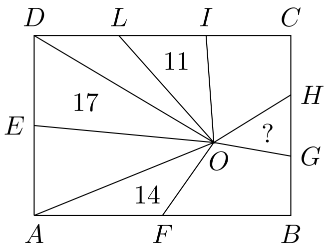
10. Paola deve reimpostare il pin del suo cellulare, costituito da una sequenza di 4 cifre (ciascuna delle quali può essere una qualsiasi cifra da 0 a 9). Per memorizzarlo, farà in modo che vi compaiano esattamente due diverse cifre.
Quanti sono i possibili pin che Paola ha a sua disposizione?

(A) 480 **(B)** 560 **(C)** 540 **(D)** 630 **(E)** 720

Risposta corretta: **(D)**.

Le due cifre X e Y presenti nel pin possono essere scelte in $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ diversi modi. Una volta individuate X e Y, si tratta di scegliere una qualsiasi sequenza di lunghezza 4 formata da esse, eccetto $XXXX$ e $YYYY$ (nelle quali compare una sola cifra). Le sequenze valide di lunghezza 4 con le cifre X e Y sono dunque $2^4 - 2 = 14$. In conclusione, i possibili pin sono $45 \cdot 14 = 630$. □

11. Nel rettangolo $ABCD$, i punti E, F, G, H, I, L suddividono i lati in 2 oppure 3 parti uguali, come in figura. Le aree dei triangoli OIL, ODE, OAF (espresse in mm^2) sono quelle indicate in figura. Di quanti mm^2 è l'area del triangolo OGH?



(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 9 **(D)** 11 **(E)** 10

Risposta corretta: **(C)**.

Conviene in primo luogo osservare che, comunque preso un punto P all'interno di un rettangolo $ABCD$, risulta $\mathsf{Area}(PAB) + \mathsf{Area}(PCD) = \frac{1}{2}\mathsf{Area}(ABCD)$, dal momento che la somma delle altezze sui lati AB e CD nei due triangoli corrisponde al lato BC. Risulta perciò che (in mm^2) $2 \cdot \mathsf{Area}(OAF) + 3 \cdot \mathsf{Area}(OIL) = 61 = \frac{1}{2}\mathsf{Area}(ABCD)$. Tuttavia, si avrà anche che $2 \cdot \mathsf{Area}(ODE) + 3 \cdot \mathsf{Area}(OGH) = \frac{1}{2}\mathsf{Area}(ABCD)$, da cui si ricava $3 \cdot \mathsf{Area}(OGH) = 61 - 2 \cdot 17 = 27$, vale a dire $\mathsf{Area}(OGH) = 9$. □

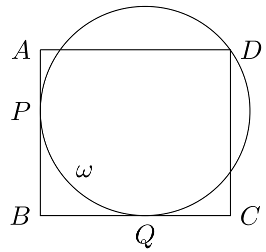
12. In un grande lago ci sono 50 isole, numerate da 2 a 51. Due diverse isole sono collegate da un ponte se e solo se uno dei rispettivi numeri divide l'altro. Per ogni isola, il relativo *distretto* è costituito dall'isola stessa e tutte quelle da essa raggiungibili tramite una sequenza di ponti. Quanti sono in tutto i *distretti*?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** 5

Risposta corretta: **(B)**.

Le uniche isole che non sono nello stesso distretto dell'isola n°2 sono quelle con un numero primo maggiore di 25, ciascuna delle quali forma un distretto a sé. Infatti, se il numero di un'isola è divisibile per un numero primo p non maggiore di 25, l'isola sarà collegata all'isola numero p, la quale è collegata all'isola numero $2p$, che a sua volta è collegata all'isola n°2. I numeri primi maggiori di 25 sono in tutto 6, vale a dire 29, 31, 37, 41, 43, 47. Nel complesso, ci sono quindi 7 distretti. □

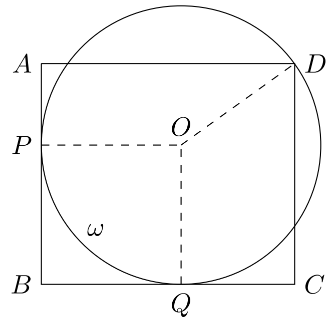
13. La circonferenza ω passa per il vertice D del rettangolo $ABCD$ ed è tangente ai lati AB e BC nei punti P e Q. I segmenti AP e CQ misurano, nell'ordine, $3\,\mathrm{m}$ e $4\,\mathrm{m}$. Quanti m^2 misura l'area del rettangolo $ABCD$?



(A) 72 **(B)** 75 **(C)** 80 **(D)** 84 **(E)** 81

Risposta corretta: **(A)**.

Indicato con O il centro della circonferenza ω, i raggi OP e OQ sono perpendcolari ai lati AB e AC, per cui $OPBQ$ è un quadrato.



Per il teorema di Pitagora, $\overline{OD}^{\,2} = \overline{AP}^{\,2} + \overline{CQ}^{\,2} = 25\,\mathrm{m}^2$, ossia $\overline{OD} = 5\,\mathrm{m}$. Essendo $OPBQ$ un quadrato, il raggio OD è congruente ai segmenti BP e BQ. L'area del rettangolo misura pertanto $(5+4)\cdot(5+3)\,\mathrm{m}^2 = 72\,\mathrm{m}^2$. □

14. Sara vuole fare una camminata lungo il bordo di un parco di forma quadrata, i cui lati misurano 1 km ciascuno. Partendo da un vertice V, con un lancio di moneta sceglie casualmente in quale direzione andare e percorre un intero lato del quadrato. Ogni volta che raggiunge un vertice, fa un nuovo lancio di moneta per scegliere la direzione. Se la camminata sarà di 4 km, qual è la probabilità che si concluda proprio nel vertice V da cui era partita?

(A) 5/16 **(B)** 1/8 **(C)** 1/2 **(D)** 1/4 **(E)** 3/8

Risposta corretta: **(C)**.

Per ritrovarsi al punto iniziale dopo 4 km, Sara deve fare o 4 volte testa, o 4 volte croce, oppure 2 volte testa e 2 volte croce. Contiamo quante sono le sequenze di lanci T e C corrispondenti. Esistono 1 sequenza con 4 T, 1 sequenza con 4 C e 6 sequenze con 2 T e 2 C: in tutto 8 sequenze valide su 2^4 possibili. La probabilità cercata è quindi uguale a $1/2$.

Più in generale, non è difficile vedere che, in un dato numero di lanci di moneta, la probabilità di fare testa un numero pari di volte è sempre $1/2$. □

15. Alberto e Barbara fanno una gara di braccio di ferro in questo modo: all'inizio hanno entrambi 1 punto; ad ogni sfida, chi vince guadagna tanti punti quanti ne ha l'avversario in quel momento, mentre chi perde mantiene il punteggio che aveva. Dopo un certo numero di sfide, Barbara ha 9000 punti.

Quale, tra i seguenti, potrebbe essere il punteggio di Alberto?

(A) 5005 **(B)** 4114 **(C)** 3130 **(D)** 3003 **(E)** 7117

Risposta corretta: **(E)**.

Possiamo osservare che, tranne la situazione iniziale, il punteggio della gara non sarà mai più in parità, dal momento che il vincente di ogni sfida aggiunge al proprio punteggio tutti i punti dell'avversario sconfitto (che invece rimane fermo al suo punteggio): dunque il vincente si troverà ogni volta ad avere più punti dell'avversario sconfitto. Questo permette di ricostruire a ritroso la sequenza di punteggi (ed i vincitori di ciascuna sfida), a partire dalla situazione di punteggio Alberto-Barbara raggiunta in un qualsiasi momento della gara.

Ad esempio, per la risposta **(A)**, con Alberto a 5005 punti, si dovrebbe avere questa sequenza di punteggi a ritroso:

$(5005, 9000) \rightsquigarrow (5005, 3995) \rightsquigarrow (1010, 3995) \rightsquigarrow (1010, 2985) \rightsquigarrow \ldots$

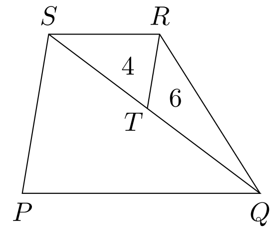
Si nota che in questo caso non sarebbe possibile tornare alla situazione iniziale $(1, 1)$ poiché, essendo i punteggi entrambi multipli di 5, operando con sottrazioni successive si continueranno a trovare sempre coppie dove entrambi sono multipli di 5, mentre la coppia iniziale $(1, 1)$ non lo è.

Qualcosa di analogo accadrebbe per le risposte **(B)** [punteggi entrambi multipli di 2], **(C)** [entrambi multipli di 10] e **(D)** [entrambi multipli di 3].

Per quanto riguarda la risposta **(E)**, è invece agevole vedere che 7117 non ha fattori primi comuni a 9000. Infatti $9000 = 9 \cdot 10^3$ ha come fattori primi solo 3, 2 e 5, nessuno dei quali divide 7117. Inoltre, bisogna osservare che la ricostruzione a ritroso dei punteggi nei vari momenti della gara, tramite sottrazioni successive, coincide con l'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD. Questo garantisce pertanto che, prima o poi si troverà una coppia di numeri uguali (n, n), dove n è appunto il MCD della coppia di numeri iniziali. Essendo $MCD(7117, 9000) = 1$, ciò significa che a un certo punto si dovrà ritrovare la coppia di punteggi $(1, 1)$.

In conclusione, tra i punteggi proposti, l'unico possibile per Alberto è 7117. □

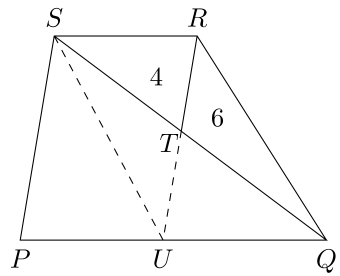
16. Considerato un trapezio $PQRS$, dove il lato PQ è parallelo a RS, sia T il punto della diagonale QS tale che RT sia parallelo a SP. Le aree dei triangoli QRT e RST misurano, nell'ordine, 6 e 4 m^2. Quanti m^2 misura l'area dell'intero trapezio $PQRS$?



(A) 30 **(B)** 35 **(C)** 32 **(D)** 36 **(E)** 27

Risposta corretta: **(B)**.

Indichiamo con U il punto nel quale PQ interseca la parallela a PS condotta in R.



Nel trapezio $QRSU$, di basi RS e QU, dal momento che $\mathsf{Area}(RSQ) = \mathsf{Area}(RSU)$, sottraendo ad esse l'area di RST, si ricava che $\mathsf{Area}(TSU) = \mathsf{Area}(RTQ) = 6$ e $\mathsf{Area}(RSU) = 4+6 = 10$. Ne segue che anche $\mathsf{Area}(SPU) = 10$ (l'altra metà del parallelogramma $RSPU$).

D'altra parte, come avviene in qualsiasi quadrilatero, vale l'uguaglianza $\mathsf{Area}(TUQ) \cdot \mathsf{Area}(TRS) = \mathsf{Area}(TQR) \cdot \mathsf{Area}(TSU)$, da cui si trova che $\mathsf{Area}(TUQ) = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$.

Si conclude che $\mathsf{Area}(PQRS) = \mathsf{Area}(RSPU) + \mathsf{Area}(RUQ) = 20 + (6+9) = 35$. □